

О СХЕМАХ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ЗАДЕРЖКАМИ

О. Б. ЛУШАНОВ

(МОСКВА)

§ 1. Постановка задачи и формулировка результата

Как известно, при «традиционных» способах реализации функций алгебры логики (контактными схемами, П-схемами, схемами из функциональных элементов, формулами) имеет место так называемый «эффект Шеннона»: «почти все функции» от n аргументов имеют «почти одинаковую» сложность, асимптотически равную сложности самой сложной функции от n аргументов. Гипотеза об этом эффекте была высказана К. Э. Шенноном в 1949 г. (см. [11]) и впоследствии доказана автором этой статьи (см., например, [5, 3]). В некоторых случаях (например, для дизъюнктивных нормальных форм) имеет место «ослабленный эффект Шеннона» — «почти все функции от n аргументов имеют почти одинаковую сложность», правда, меньшую, чем сложность самой сложной функции [1, 7, 8].

В настоящей работе рассматривается один естественный класс управляющих систем — правильные схемы из функциональных элементов с задержками, для которых эти эффекты, вообще говоря, не имеют места.

Будем рассматривать схемы из элементов следующего вида. Каждому элементу E_i поставлена в соответствие некоторая функция алгебры логики $\varphi_i(x_1, \dots, x_{k_i})$ (существенно зависящая от k_i аргументов) и два положительных числа: P_i — «вес элемента» и T_i — «задержка элемента»; эти числа не предполагаются целыми. Если $k_i \geq 2$, то числа $\frac{P_i}{k_i - 1}$ и $\frac{T_i}{\log k_i}$ *)

будем называть *приведенным весом* и *приведенной задержкой* элемента E_i соответственно. Предполагается, что число входов элемента E_i при $k_i \geq 1$ равно k_i , а при $k_i = 0$ (т. е. если элемент реализует константу) равно 1.

Схемы строятся над конечным множеством $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_r\}$ элементов указанного вида в соответствии с правилами построения схем из функциональных элементов [5, 4].

Цепью между элементами $E^{(1)}$ и $E^{(2)}$ схемы будем называть последовательность элементов схемы E_{i_1}, \dots, E_{i_s} , обладающую свойствами:

- 1) некоторый вход элемента E_{i_j} присоединен к выходу элемента $E_{i_{j-1}}$ ($2 \leq j \leq s$);
- 2) $E^{(1)} = E_{i_1}$, $E^{(2)} = E_{i_s}$.

Число $T_{i_1} + \dots + T_{i_s}$ будем называть *задержкой* этой цепи. Цепь будем называть *главной*, если некоторый вход ее первого элемента E_{i_1} является входом схемы, а выход ее последнего элемента E_{i_s} есть выход схемы. Схему S будем называть *правильной*, если задержки всех ее главных

*) Здесь всюду имеются в виду двоичные логарифмы.

цепей равны *). Это общее число будем называть задержкой схемы и обозначать символом $T(S)$. Функция, реализуемая схемой, и сложность $L(S)$ схемы определяются так же, как для схем из функциональных элементов.

Будем предполагать, что система \mathcal{E} исходных элементов полна в том смысле, что для каждой функции алгебры логики f может быть построена правильная схема, реализующая f (с некоторой задержкой), т. е. имеется в виду «полнота во втором смысле» в терминологии В. Б. Кудрявцева [2]; однако здесь не предполагается соизмеримость задержек элементов базиса.

Полный базис будем называть *регулярным*, если схемами в этом базисе можно реализовать с одной и той же задержкой все четыре функции от одного аргумента $x, \bar{x}, 0, 1$ **). В противном случае базис будем называть *нерегулярным*. Из результатов В. Б. Кудрявцева [2] следует, что в случае соизмеримых задержек (например, целочисленных) базис является регулярным ***).

Функцию алгебры логики $f(x_1, \dots, x_n)$ будем называть x -функцией (соответственно \bar{x} -функцией, 0-функцией, 1-функцией), если функция $f(x, \dots, x)$ равна x (соответственно $\bar{x}, 0, 1$ ****); x - и \bar{x} -функции будем также называть ϕ -функциями, а 0- и 1-функции — c -функциями.

Рассмотрим следующие функции Шеннона:

$L(f)$ — минимум сложностей (правильных) схем, реализующих функцию f ;

$T(f)$ — минимум задержек схем, реализующих функцию f . Пусть \mathfrak{N}_n (соответственно $\mathfrak{N}_n^c, \mathfrak{N}_n^\phi$) — множество всех функций (соответственно c -функций, ϕ -функций) $f(x_1, \dots, x_n)$ и пусть

$$\begin{aligned} L(n) &= \max_{f \in \mathfrak{N}_n} L(f), & T(n) &= \max_{f \in \mathfrak{N}_n} T(f); \\ L^c(n) &= \max_{f \in \mathfrak{N}_n^c} L(f), & T^c(n) &= \max_{f \in \mathfrak{N}_n^c} T(f); \\ L^\phi(n) &= \max_{f \in \mathfrak{N}_n^\phi} L(f), & T^\phi(n) &= \max_{f \in \mathfrak{N}_n^\phi} T(f). \end{aligned}$$

Пусть Φ — множество всех базисных функций $\varphi_i(x_1, \dots, x_{k_i})$, существенно зависящих не менее чем от двух аргументов, и Φ^* — его подмножество, состоящее из всех ϕ -функций. Пусть, наконец,

$$\begin{aligned} \rho &= \min_{\varphi_i \in \Phi} \frac{P_i}{k_i - 1}, & \tau &= \min_{\varphi_i \in \Phi} \frac{T_i}{\log k_i}; \\ \rho^* &= \min_{\varphi_i \in \Phi^*} \frac{P_i}{k_i - 1}, & \tau^* &= \min_{\varphi_i \in \Phi^*} \frac{T_i}{\log k_i}. \end{aligned}$$

Очевидно, что если числа ρ^* и τ^* определены ****), то

$$\rho^* \geq \rho, \quad \tau^* \geq \tau.$$

Имеют место утверждения.

*) Из этого определения следует, что для любого элемента схемы задержки всех цепей, идущих от входов схемы к входам этого элемента, равны.

**) Ниже (§ 2) будет дано другое (эквивалентное) определение. Существование нерегулярных базисов будет установлено в § 4 (лемма 14).

***). См. также ниже, стр. 47.

****) В терминологии Э. Поста (см. [10,9]) это соответственно α -, δ -, γ -, β -функции.

*****) Из доказываемой ниже леммы 2 следует, что в случае нерегулярного базиса Φ^* пусто.

Теорема 1. Если базис \mathcal{E} регулярный, то:

$$1) L(n) \sim L^c(n) \sim L^\Phi(n) \sim \rho \frac{2^n}{n};$$

$$2) T(n) \sim T^c(n) \sim T^\Phi(n) \sim \tau n^*);$$

3) более того, для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ от достаточно большого числа аргументов существует схема S , реализующая f и такая, что

$$L(S) < (1 + \varepsilon) \rho \frac{2^n}{n}, \quad T(S) < (1 + \varepsilon) \tau n.$$

Теорема 2. Если базис \mathcal{E} нерегулярный, то

$$1а) L^c(n) \sim \rho \frac{2^n}{n};$$

$$1б) L(n) \sim L^\Phi(n) \sim \rho^* \frac{2^n}{n};$$

$$2а) T^c(n) \sim \tau n;$$

$$2б) T(n) \sim T^\Phi(n) \sim \tau^* n^{**});$$

3) более того, для любого $\varepsilon > 0$ и любой с-функции (соответственно Φ -функции) $f(x_1, \dots, x_n)$ от достаточно большого числа аргументов существует схема S , реализующая f и такая, что

$$L(S) < (1 + \varepsilon) \rho \frac{2^n}{n}, \quad T(S) < (1 + \varepsilon) \tau n$$

(соответственно $L(S) < (1 + \varepsilon) \rho^* \frac{2^n}{n}$, $T(S) < (1 + \varepsilon) \tau^* n$).

Эти теоремы показывают, что хотя ρ и τ (а также ρ^* и τ^*) могут достигаться на разных элементах, тем не менее для почти всех функций возможно построение схем, асимптотически наилучших одновременно и по сложности, и по задержке. Теорема 2, кроме того, указывает, что в случае нерегулярного базиса и $\rho^* > \rho$ «почти все» функции разбиваются на два подмножества, содержащие каждое «почти половину» всех функций; эти подмножества реализуются с разной сложностью. Это явление может быть более наглядно выражено следующим образом. Обозначим через $N_n(L)$ число функций $f(x_1, \dots, x_n)$, для которых $L(f) \leq L$. Поведение функции $N_n(L)$ приблизительно изображено на рис. 1. Для случая

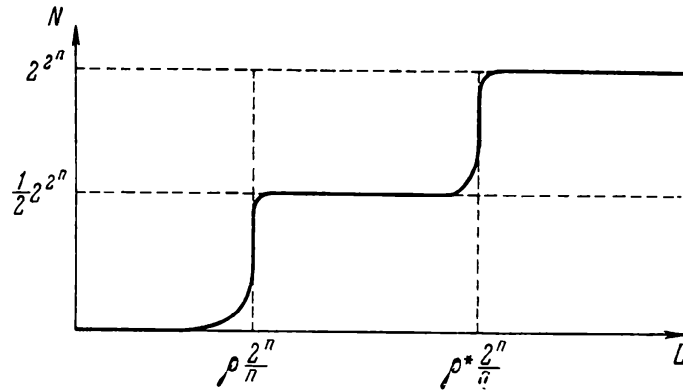


Рис. 1.

для случая

*) Фактически для «почти всех» функций $f(x_1, \dots, x_n)$ от n аргументов $L(f) \sim \rho \frac{2^n}{n}$ и $T(f) \sim \tau n$.

***) Для «почти всех» с-функций (соответственно Φ -функций) $f(x_1, \dots, x_n)$ от n аргументов $L(f) \sim \rho \frac{2^n}{n}$ и $T(f) \sim \tau n$ (соответственно $L(f) \sim \rho^* \frac{2^n}{n}$ и $T(f) \sim \tau^* n$).

«традиционных» способов реализации примерное поведение соответствующей функции $N_n(L)$ изображено на рис. 2. Повышение оценок для $L^\Phi(n)$ и $T^\Phi(n)$ в случае нерегулярного базиса происходит из-за того, что в этом случае схемы для Φ -функций могут состоять из элементов только части базиса (« Φ -элементов» — лемма 2).

Первое утверждение теоремы 1 (при условии, что задержки элементов — целые числа) является почти тривиальным следствием теоремы об асимптотике функции Шеннона для схем из функциональных элементов ([5]; см. также [6], теорема Д.12). Второе утверждение (при том же условии) также почти очевидно. Третье утверждение является несколько

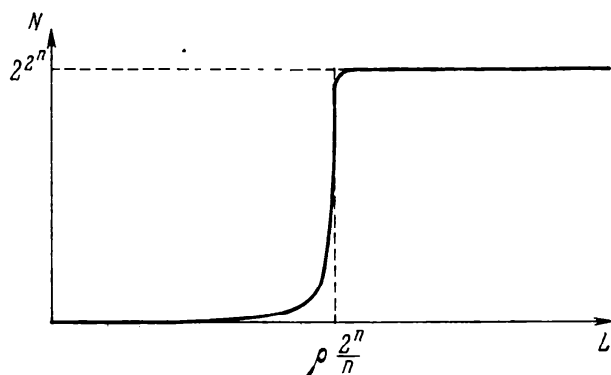


Рис. 2.

менее тривиальным (если ρ и τ достигаются на разных элементах). Оно оказывается возможным из-за того, что «сложность схемы» и «глубина схемы» создаются разными частями схемы, и эти части схемы могут строиться из элементов разных сортов.

П л а н д о к а з а т е л ь с т в а т е о р е м. В § 3 будут установлены нижние оценки функций L и T . При получении оценки для $L^\Phi(n)$ в случае

нерегулярного базиса используется упомянутое выше свойство таких базисов (§ 2). Нижние оценки для $T(n)$ и $T^c(n)$ также фактически известны. Их доказательство приводится исключительно для полноты картины.

Методы синтеза схем, упоминаемых в третьих утверждениях обеих теорем (и дающих верхние оценки для асимптотических соотношений первых двух утверждений), описываются в §§ 8—10 (§§ 4—7 содержат вспомогательные предложения).

Будут приведены три метода синтеза:

- 1) для реализации любых функций в произвольном регулярном базисе;
- 2) для реализации 0-функций в произвольном нерегулярном базисе;
- 3) для реализации x -функций в произвольном нерегулярном базисе.

Очевидно, что специальных методов синтеза схем (в нерегулярном базисе) для 1-функций и для \bar{x} -функций не надо — соответствующие схемы получаются из схем для 0-функций и x -функций в результате присоединения к их выходам схем, реализующих отрицание.

§ 2. Некоторые свойства регулярных базисов

Множество функций \mathfrak{M} будем называть *совместным* (относительно базиса \mathcal{E}), если все функции из \mathfrak{M} можно реализовать схемами с одинаковыми задержками. В силу полноты базиса справедливо следующее утверждение.

(*) Пусть \mathfrak{M} — совместное множество и $\varphi(x_1, \dots, x_m)$ — произвольная функция. Тогда множество функций вида $\varphi(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, где $\varphi_i \in \mathfrak{M}$, является совместным.

Л е м м а 1. Для того чтобы была совместной система функций $\{x, \bar{x}, 0, 1\}$ (т. е. чтобы базис был регулярным), необходимо и достаточно,

чтобы была совместной хотя бы одна из пар

$$\{x, \bar{x}\}, \{x, 0\}, \{x, 1\}, \{\bar{x}, 0\}, \{\bar{x}, 1\}. \quad (1)$$

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть совместна пара $\{x, \bar{x}\}$. Рассмотрим функцию $g(x, y, z)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} g(0, 0, 0) = g(0, 0, 1) = g(1, 1, 1) = 0, \\ g(0, 1, 1) = g(1, 0, 0) = g(1, 1, 0) = 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$g(x, x, x) = 0, \quad g(x, x, \bar{x}) = x, \quad g(\bar{x}, \bar{x}, x) = \bar{x}, \quad g(x, \bar{x}, \bar{x}) = 1,$$

и в силу (*) система $\{x, \bar{x}, 0, 1\}$ совместна.

Пусть совместна пара $\{x \oplus \alpha, \beta\}$ *) (любая из четырех последних в (1)). Рассмотрим функцию $\varphi_1(x) = x \oplus \alpha \oplus 1$. В силу (*) совместны функции $\varphi_2(x) = \varphi_1(x \oplus \alpha) = x$ и $\varphi_3(x) = \varphi_1(\beta) = \alpha \oplus \beta \oplus 1$.

Далее, совместны функции

$$\varphi_2(\varphi_2(x)) = x, \quad \varphi_2(\varphi_3(x)) = \alpha \oplus \beta, \quad \varphi_3(\varphi_3(x)) = \alpha \oplus \beta \oplus 1,$$

т. е. $x, 0, 1$.

Наконец, рассмотрим функцию $h(x_1, x_2, x_3, x_4)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} h(0, 0, 0, 0) = h(0, 0, 0, 1) = h(1, 1, 1, 1) = 0, \\ h(0, 0, 1, 1) = h(0, 1, 1, 1) = 1. \end{aligned}$$

Тогда совместны функции

$$h(0, 0, 0, x) = 0, \quad h(0, 0, x, 1) = x, \quad h(0, x, 1, 1) = 1, \quad h(x, 1, 1, 1) = \bar{x}.$$

Лемма доказана.

Следствие (ср. [2]). Если все элементы базиса имеют рациональные задержки, то базис регулярен.

В самом деле, существуют схемы S_1 и S_2 , реализующие соответственно x и 0 ; пусть их (рациональные) задержки равны $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$.

Соединив последовательно $q_1 p_2$ экземпляров схемы S_1 , получим схему для x с задержкой $p_1 p_2$. Аналогично из $p_1 q_2$ экземпляров схемы S_2 получим схему для 0 с задержкой $p_1 p_2$. Таким образом, пара $\{x, 0\}$ совместна, и в силу леммы 1 базис регулярен.

Пусть $* \in \{x, \bar{x}, 0, 1, \bar{\phi}, \bar{s}\}$. Элемент базиса, реализующий $*$ -функцию, будем называть $*$ -элементом.

Л е м м а 2. Пусть \mathcal{E} — нерегулярный базис и S — схема в \mathcal{E} , содержащая хотя бы один s -элемент. Тогда S реализует некоторую s -функцию.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть S' — схема, получающаяся из S в результате отождествления входов. Рассмотрим главную цепь $\Delta = [E_{i_1}, \dots, E_{i_s}]$, проходящую через некоторый s -элемент E_{i_j} . Тогда либо на все входы этого элемента подаются константы либо на все входы подается функция x , либо на все входы подается функция \bar{x} (ибо в противном случае была бы совместной одна из пар (1), что невозможно для нерегулярного базиса). Во всех трех случаях на выходе этого s -элемента реализуется константа. Поэтому (опять в силу нерегулярности базиса)

*) Символ \oplus означает сложение по mod 2.

на входы всех следующих элементов цепи $E_{i_{j+1}}, \dots, E_{i_s}$ также подаются константы, и схема S' реализует константу.

Лемма доказана.

Рассмотрим два свойства базиса.

I. Существуют две цепи с одинаковыми задержками, состоящие только из \bar{x} -элементов, одна из которых содержит четное число x -элементов, а другая нечетное число x -элементов.

II. Существуют две цепи с одинаковыми задержками, одна из которых состоит только из \bar{x} -элементов, а другая содержит хотя бы один s -элемент.

Цепь E_{i_1}, \dots, E_{i_s} будем называть *специальной*, если все входы элемента E_{i_l} присоединены к одному входу схемы, а все входы элемента E_{i_l} ($2 \leq l \leq s$) присоединены к выходу элемента $E_{i_{l-1}}$ (рис. 3).

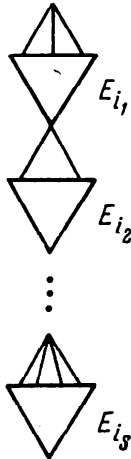


Рис. 3.

Каждая специальная цепь (рассматриваемая как схема) реализует некоторую функцию от одного аргумента, скажем, от x .

Дадим теперь другое определение регулярного базиса, более удобное для проверки.

Л е м м а 3. Для того чтобы базис был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы он обладал одним из свойств (N_I) и (N_{II}) .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д о с т а т о ч н о с т ь. Если выполнено свойство I (соответственно свойство II), то, образовав соответствующие специальные цепи, получим, что совместна пара $\{x, \bar{x}\}$ (соответственно некоторая пара $\{x \oplus \alpha, \beta\}$); поэтому в силу леммы 1 базис регулярен.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть базис регулярен и пусть T^* — минимальная положительная задержка, с которой могут быть реализованы функции из некоторой пары (1) (см. лемму 1). Пусть S_1 и S_2 — две схемы с задержкой T^* , реализующие указанные функции. В силу минимальности числа T^* для каждого элемента E этих схем имеет место одна из следующих возможностей *):

- а) на все входы этого элемента подаются константы;
- б) на все входы этого элемента подается функция \bar{x} ;
- в) на все входы этого элемента подается функция x .

Пусть S — одна из таких схем, реализующая функцию $x \oplus \alpha$, и E_{i_1}, \dots, E_{i_s} — ее главная цепь. Тогда для всех элементов этой цепи выполнено б) или в) (ибо если на входы элемента E_{i_j} подаются константы, то на его выходе будет константа; поэтому на все входы элемента $E_{i_{j+1}}$ подаются константы и т. д.). Поэтому цепь состоит только из \bar{x} -элементов.

Рассмотрим теперь два случая.

1) Схемы S_1 и S_2 реализуют x и \bar{x} . В этом случае их главные цепи состоят из \bar{x} -элементов, причем в первой содержится четное число x -элементов, а во второй — нечетное их число, т. е. выполнено свойство I.

2) Схемы S_1 и S_2 реализуют $x \oplus \alpha$ и β . В этом случае главная цепь Δ_1 схемы S_1 состоит из \bar{x} -элементов. Рассмотрим главную цепь $\Delta_2 = [E_{i_1}, \dots, E_{i_s}]$ схемы S_2 . Пусть E_{i_j} — первый элемент этой цепи, выдающий константу (так как E_{i_s} выдает константу, то такой элемент существует). Тогда для него выполнено б) или в). Поэтому E_{i_j} есть s -элемент. Для цепей Δ_1 и Δ_2 выполнено свойство II.

Лемма доказана.

*) Ср. с доказательством леммы 2; там аналогичная ситуация была из-за несовместности пар из (1) вообще.

§ 3. Нижние оценки функций Шеннона

А. Оценки сложности.

Л е м м а 4. Справедливы соотношения

$$L(n) \geq \rho \frac{2^n}{n}, \quad L^c(n) \geq \rho \frac{2^n}{n}, \quad L^\Phi(n) \geq \rho \frac{2^n}{n},$$

а в случае нерегулярного базиса

$$L^\Phi(n) \geq \rho^* \frac{2^n}{n}.$$

В самом деле, известно (см. [5,6]), что для «обычных» схем из функциональных элементов (без согласования задержек цепей) функция Шеннона $L^0(n)$ удовлетворяет условию

$$L^0(n) \geq \rho \frac{2^n}{n},$$

где ρ — минимум приведенных весов элементов базиса. В случае использования лишь правильных схем функция Шеннона может только увеличиться. Поэтому для нашего случая имеем

$$L(n) \geq \rho \frac{2^n}{n}.$$

Это же неравенство справедливо и отдельно для Φ -функций и c -функций (ибо логарифмы числа функций из \mathfrak{N}_n^Φ и из \mathfrak{N}_n^c асимптотически равны 2^n). В случае нерегулярного базиса нижняя оценка для $L^\Phi(n)$ повышается: в силу леммы 2 при реализации Φ -функций можно пользоваться схемами лишь над частью базиса, состоящей из Φ -элементов; поэтому в нижней оценке константа ρ может быть заменена на ρ^* .

Б. Оценки задержки. Обозначим через $M(T)$ максимум числа элементов в неприводимых*) правильных схемах в базисе \mathcal{E} , имеющих один выход и удовлетворяющих условию

$$T(S) \leq T.$$

Лемма 5.

$$M(T) \leq C_1 T 2^{\frac{T}{\tau}},$$

где τ — минимум приведенных задержек элементов базиса**).

Доказательство. Пусть T_0 — наименьшая из задержек элементов базиса. Разобьем область изменения T на полуинтервалы $J_i = [(i-1)T_0, iT_0)$. Будем доказывать индукцией по i — номеру полуинтервала, которому принадлежит T , неравенство

$$M(T) \leq \frac{T}{T_0} 2^{\frac{T}{\tau}}. \quad (2)$$

Если $i=1$, т. е. $0 \leq T < T_0$, то $M(T) = 0$, и неравенство (2) очевидно.

*) Схема называется неприводимой, если для каждого элемента выполнено условие: его выход либо является выходом схемы, либо присоединен к входу некоторого элемента. Очевидно, что для каждой правильной схемы S можно указать неприводимую правильную схему S' , реализующую ту же функцию, что и S , и такую, что $L(S') \leq L(S)$ и $T(S') = T(S)$.

**) Всюду в этой статье буквой C с индексами обозначаются константы (вообще говоря, зависящие от базиса).

Индуктивный шаг. Пусть $T \in J_i$, $i \geq 2$. В этом случае $T \geq T_0$ и $M(T)$ достигается на схеме S , имеющей не менее одного элемента. Пусть E — выходной элемент с k входами и задержкой T^* .

Если $k = 1$, то имеем, используя индуктивное предположение и неравенства $T \geq T_0$ и $T^* \geq T_0$

$$\begin{aligned} M(S) &\leq 1 + M(T - T^*) \leq 1 + \frac{T - T^*}{T_0} 2^{\frac{T - T^*}{\tau}} \leq 1 + \frac{T - T_0}{T_0} 2^{\frac{T}{\tau}} = \\ &= 1 + \frac{T}{T_0} 2^{\frac{T}{\tau}} - 2^{\frac{T}{\tau}} < \frac{T}{T_0} 2^{\frac{T}{\tau}}. \end{aligned}$$

Если $k \geq 2$, то $\tau \leq \frac{T^*}{\log k}$, $\log k \leq \frac{T^*}{\tau}$, $k \leq 2^{\frac{T^*}{\tau}}$, и аналогично имеем

$$\begin{aligned} M(S) &\leq 1 + kM(T - T^*) \leq 1 + k \frac{T - T^*}{T_0} 2^{\frac{T - T^*}{\tau}} \leq 1 + \frac{T - T^*}{T_0} 2^{\frac{T}{\tau}} = \\ &= 1 + \frac{T}{T_0} 2^{\frac{T}{\tau}} - \frac{T^*}{T_0} 2^{\frac{T}{\tau}} \leq \frac{T}{T_0} 2^{\frac{T}{\tau}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 6. Справедливы соотношения

$$T(n) \geq \tau n, \quad T^c(n) \geq \tau n, \quad T^\Phi(n) \geq \tau n,$$

а в случае нерегулярного базиса

$$T^\Phi(n) \geq \tau^* n.$$

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Рассмотрим схемы, задержка которых не превосходит $(1 - \varepsilon)\tau n$. В силу леммы 5 число элементов в каждой из таких схем не превосходит

$$C_1(1 - \varepsilon)\tau n 2^{(1 - \varepsilon)n} = C_2 \frac{n 2^n}{2^{\varepsilon n}} = o\left(\frac{2^n}{n}\right).$$

Поэтому в силу леммы 4 при $n > n_\varepsilon$ не всякая функция от n аргументов может быть реализована такой схемой. Таким образом, при $n > n_\varepsilon$

$$T(n) > (1 - \varepsilon)\tau n.$$

Точно так же при достаточно больших n справедливы неравенства

$$T^c(n) > (1 - \varepsilon)\tau n, \quad T^\Phi(n) > (1 - \varepsilon)\tau n.$$

Наконец, в случае нерегулярного базиса в нижней оценке для $T^\Phi(n)$ константа τ может быть заменена на τ^* (по той же причине, что и в доказательстве леммы 4).

Лемма доказана.

§ 4. Некоторые вспомогательные утверждения

Лемма 7. Существуют схемы S_1, S_2, S_3 , имеющие одну и ту же задержку $T^{(1)}$ и реализующие соответственно функции $x, xy, x \vee y$.

Доказательство. В силу полноты базиса существует правильная схема S_0 с некоторой задержкой T_0 , реализующая функцию $\delta(x, y) = \bar{x} \vee \bar{y}$. Поэтому функция $\delta(\delta(x_1, x_2), \delta(x_3, x_4)) = x_1 x_2 \vee x_3 x_4$ может быть реализована с задержкой $2T_0$.

Отождествляя в схеме для этой функции входы, получим требуемые схемы:

при $x_1 = x, x_2 = x, x_3 = x, x_4 = x$ — схему для x ;

при $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = x, x_4 = y$ — схему для xy ;

при $x_1 = x, x_2 = x, x_3 = y, x_4 = y$ — схему для $x\bar{y}$.

Лемма 8. Для любых r и $m, r \leq m$ существует схема $K_{r,m}$, реализующая $x_1 x_2 \dots x_r$, такая, что

$$L(K_{r,m}) \leq C_3 m, \quad T(K_{r,m}) = \lceil \log m \rceil T^{(1)}.$$

Доказательство. Пусть $\mu = \lceil \log m \rceil$. Схема $K_{r,m}$ получается из μ -ярусного дихотомического дерева, построенного из схем S_2 (и реализующего конъюнкцию длины 2^μ) в результате отождествления некоторых входов. Заметим еще, что $m \leq 2^\mu < 2m$.

Справедлива аналогичная

Лемма 9. Для любых r и $m, r \leq m$ существует схема $D_{r,m}$, реализующая $x_1 \bar{y} x_2 \bar{y} \dots \bar{y} x_r$, такая, что

$$L(D_{r,m}) \leq C_4 m, \quad T(D_{r,m}) = \lceil \log m \rceil T^{(1)}.$$

Лемма 10. Существуют схемы S_4, S_5, S_6, S_7 , имеющие одну и ту же задержку $T^{(2)}$ и реализующие соответственно функции $1, 0, xy, x\bar{y}$.

Доказательство. В силу полноты базиса существуют правильные схемы S_α и S_β , реализующие соответственно функции $\alpha(x, y) = x\bar{y}$ и $\beta(x, y) = xy$ с задержками T_α и T_β . Поэтому с задержкой $T_\alpha + T_\beta$ могут быть реализованы функции

$$\alpha(\beta(x, x), \beta(x, x)) = 1, \quad \beta(\alpha(x, x), \alpha(x, x)) = 0,$$

$$\beta(\alpha(x, x), \alpha(y, x)) = \bar{x}y, \quad \alpha(\beta(x, x), \beta(y, x)) = x\bar{y}.$$

Пусть $K_m^0(x_1, \dots, x_m)$ — система всех конъюнкций $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$ таких, что $(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \neq (0, \dots, 0), (\sigma_1, \dots, \sigma_m) \neq (1, \dots, 1)$.

Лемма 11. Для любой конъюнкции из K_m^0 существует схема S , реализующая эту конъюнкцию и такая, что

$$L(S) \leq C_5 m, \quad T(S) = T^{(2)} + \lceil \log m \rceil T^{(1)}.$$

Доказательство. Схема S получается из схемы $K_{m,m}$ в результате присоединения к ее входам m схем S_6 для $\bar{x}y$ (при этом реализуется конъюнкция вида $u_1 \dots u_m \bar{v}_1 \dots \bar{v}_m$) и отождествления некоторых входов.

Наряду со схемами $S_1 - S_7$ в дальнейшем будет использоваться (существующая в силу полноты базиса) схема S_8 с некоторой задержкой $T^{(3)}$, реализующая функцию $\xi(x, y, z, w) = x(yz\bar{w})$.

Функции $x_1 x_2 \dots x_m \bar{x}_{q_1}^{\sigma_{q_1}} \bar{x}_{q_2}^{\sigma_{q_2}} \dots \bar{x}_{q_l}^{\sigma_{q_l}}$, где $l \leq m, 1 \leq q_j \leq m$ и набор $(\sigma_{q_1}, \dots, \sigma_{q_l})$ отличен от нулевого, будем называть A -функциями. Из этого определения следует, что любая A -функция является x -функцией.

Лемма 12. Для любой A -функции $\alpha(x_1, \dots, x_m)$ существует правильная схема S , реализующая эту функцию и такая, что

$$L(S) \leq C_6 m, \quad T(S) = T^{(3)} + \lceil \log m \rceil T^{(1)}.$$

Доказательство. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \xi(u_1, v_1, w_1, v_2) \xi(u_2, v_2, w_2, v_3) \dots \xi(u_{m-1}, v_{m-1}, w_{m-1}, v_m) \xi(u_m, v_m, w_m, v_1) = \\ = u_1 u_2 \dots u_m (v_1 v_2 \dots v_m w_1 w_2 \dots w_m \sqrt{\bar{v}_1 \bar{v}_2 \dots \bar{v}_m}). \end{aligned}$$

Эту функцию обозначим через $\omega(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_m)$.

Пусть теперь $\alpha = x_1 \dots x_m \bigvee x_{q_1}^{\sigma_{q_1}} \dots x_{q_l}^{\sigma_{q_l}}$ — произвольная А-функция.

Ее переменные разбиваются на три группы:

1) переменные, входящие во вторую конъюнкцию без отрицаний (т. е. входящие в обе конъюнкции); пусть это x_{i_1}, \dots, x_{i_a} ;

2) переменные, входящие во вторую конъюнкцию с отрицаниями; пусть это x_{j_1}, \dots, x_{j_b} ;

3) переменные, не входящие во вторую конъюнкцию; пусть это x_{h_1}, \dots, x_{h_c} . Ясно, что $1 \leq a \leq m$, $0 \leq b \leq m-1$, $0 \leq c \leq m-1$. Поэтому функция α может быть получена из ω в результате некоторой подстановки переменных (если $a = m$, то полагаем $v_1 = \dots = v_m = w_1 = \dots = w_m = x_1$; если $c = 0$, то полагаем, например, предварительно $w_1 = \dots = w_m = v_1$).

Схема S для α получается из схемы $K_{m,m}$ и m схем S_7 , присоединенных к входам схемы $K_{m,m}$, в результате отождествления входов, описанного выше.

Наконец, существует правильная схема S_9 с некоторой задержкой $T^{(4)}$, реализующая функцию $\zeta(x, y, z) = xy \bigvee xz$.

Схемы $S_1 - S_9$ будем называть каноническими.

З а м е ч а н и е. Вместо функции $\xi(x, y, z, w)$ можно было бы взять «более простую» функцию $\eta(x, y, w) = x(y \bigvee \bar{w})$, ибо $\eta(x, y, w) \& \eta(x, z, w) = \xi(x, y, z, w)$, или только что введенную функцию $\zeta(x, y, z)$, ибо $\zeta(w, x, y) \& \zeta(y, x, x) = \eta(x, y, w)$.

Л е м м а 13. Система элементов, реализующих функции $\delta(x, y) = x \bigvee \bar{y}$, $\beta(x, y) = x \bar{y}$, $\xi(x, y, z, w) = x(yz \bigvee \bar{w})$ с любыми задержками (в частности, несоизмеримыми), является полной.

В самом деле, любая 0-функция $f(x_1, \dots, x_n)$ может быть реализована как дизъюнкция конъюнкций из K_n^0 ; при этом используются лишь элементы для β и δ (см. доказательство лемм 7, 8, 9, 11). Любая 1-функция реализуется как отрицание 0-функции (отрицание реализует один дополнительный элемент для δ с отождествленными входами). Любая x -функция реализуется как дизъюнкция А-функций; при этом используются элементы для δ и ξ . Любая \bar{x} -функция реализуется как отрицание x -функции.

Л е м м а 14. Существуют нерегулярные базисы.

В самом деле, примером такого базиса может служить система элементов для функций δ , β , ξ (лемма 13) с задержками 1 , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ соответственно. Каждое из условий I и II не выполнено, так как числа 1 , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ линейно независимы над полем рациональных чисел.

Л е м м а 15. Пусть E — произвольный элемент базиса, реализующий функцию, отличную от константы, и имеющий задержку T . Тогда существуют схемы Z_E и C_E , обладающие свойствами:

1) Z_E имеет три входа и один выход; ее функция $g(x, y, z)$ удовлетворяет условию $g(0, 1, z) = z \oplus \sigma$ (для некоторого σ);

$$L(Z_E) = C_7, \quad T(Z_E) = T.$$

2) C_E имеет два входа и два выхода; функции $g_0(x, y)$ и $g_1(x, y)$, ею реализуемые, удовлетворяют условию $g_0(0, 1) = 0$, $g_1(0, 1) = 1$;

$$L(C_E) = C_8, \quad T(C_E) = T.$$

Доказательство. Пусть E реализует функцию $\varphi(x_1, \dots, x_k)$. Существуют константы*) $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \sigma$ такие, что $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, z) = z \oplus \sigma$. Пусть i_1, \dots, i_s — номера нулевых компонент набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})$ и j_1, \dots, j_t — номера его единичных компонент. Схема Z_E получается в результате присоединения входов элемента E с номерами i_1, \dots, i_s к первому входу схемы; входов с номерами j_1, \dots, j_t ко второму входу схемы; k -го входа — к третьему входу схемы (**).

Схема C_E получается из двух схем Z_E , в одной из которых вход z отождествлен с x , а в другой — z с y .

Замечание. Цепочка из t последовательно соединенных схем C_E реализует константы 0 и 1 с задержками $0, T, \dots, tT$, если на входы цепочки поданы константы 0 и 1. Цепочка из схем Z_E четной длины t (при наличии констант, изготавливаемых цепочкой схем C_E) реализует функцию $f(z) = z$ с задержкой tT .

§ 5. Отрезки и основные отрезки

Будем рассматривать наборы из нулей и единиц некоторой длины m .

Сопоставим каждому набору $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ число $|\tilde{\sigma}| = \sum_{i=1}^m \sigma_i 2^{m-i}$. Множество целых чисел l , удовлетворяющих условию $l_1 \leq l < l_2$, будем обозначать через $[l_1, l_2)$ и называть *отрезком*. Отрезок вида $[\lambda 2^i, (\lambda + 1) 2^i)$, где λ и i — целые неотрицательные числа, будем называть *основным отрезком*. Термины «отрезок» и «основной отрезок» будем применять также для обозначения множеств соответствующих наборов.

Лемма 16. *Любой отрезок I (наборов длины m или соответствующих им чисел) есть объединение не более $2m$ основных отрезков.*

Доказательство. Обозначим через $\delta(l)$ наибольшее число δ такое, что 2^δ делит l (если $l = 0$, то $\delta(l) = \infty$). Пусть $I = [l_1, l_2)$, $\delta(I) = \max_{l_1 \leq l < l_2} \delta(l)$ *** и пусть l_0 — число, для которого $\delta(l_0) = \delta(I)$. Отрезок $[l_1, l_2)$ будем называть левым, если $l_0 = l_1$, правым, если $l_0 = l_2$, и средним, если $l_1 < l_0 < l_2$. Ясно, что средний отрезок $[l_1, l_2)$ есть объединение правого отрезка $[l_1, l_0)$ и левого отрезка $[l_0, l_2)$.

Покажем теперь, что любой левый (правый) отрезок есть объединение не более m основных отрезков. Рассмотрим сначала частный случай $I = [0, l)$. Пусть $l = 2^{i_1} + 2^{i_2} + \dots + 2^{i_s}$ (i_j — целые неотрицательные числа; $i_1 > i_2 > \dots > i_s$; $s \leq m$). Тогда

$$\begin{aligned} I &= [0, 2^{i_1}) \cup [2^{i_1}, 2^{i_1} + 2^{i_2}) \cup \dots \cup [2^{i_1} + \dots + 2^{i_{s-1}}, 2^{i_1} + \dots + 2^{i_{s-1}} + 2^{i_s}) = \\ &= [0 \cdot 2^{i_1}, 1 \cdot 2^{i_1}) \cup [2^{i_1-i_2} \cdot 2^{i_2}, (2^{i_1-i_2} + 1) 2^{i_2}) \cup \dots \\ &\quad \dots \cup [(2^{i_1-i_s} + \dots + 2^{i_{s-1}-i_s}) 2^{i_s}, (2^{i_1-i_s} + \dots + 2^{i_{s-1}-i_s} + 1) 2^{i_s}), \end{aligned}$$

т. е. I является объединением не более m основных отрезков.

Пусть теперь $l_1 > 0$ и $I = [l_1, l_2)$ — левый отрезок. Имеем $l_1 = (2s + 1) 2^{\delta(l_1)}$. Далее,

$$l_2 - l_1 < 2^{\delta(l_1)}, \quad (3)$$

*) При $k = 1$ константы $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ отсутствуют.

**) Если некоторая константа не используется, то соответствующий ей вход схемы не присоединяется к входам элемента E .

***) Правый конец учитывается!

ибо в противном случае, с одной стороны, $l^* = l_1 + 2^{\delta(l_1)} \in [l_1, l_2]$, и, с другой стороны, $l^* = (2s + 2) 2^{\delta(l_1)} = (s + 1) 2^{\delta(l_1) + 1}$, т. е. $\delta(l^*) > \delta(l_1)$, а это противоречит тому, что $\max_{l_1 \leq l \leq l_2} \delta(l)$ достигается при $l = l_1$. Из (3) следует, что из представления отрезка $[0, l_2 - l_1]$ в виде суммы (не более m) основных отрезков получается соответствующее представление отрезка $[l, l_2]$ (достаточно ко всем концам прибавить l_1).

Аналогичные утверждения справедливы и для правых отрезков.

Тем самым лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Наборы, соответствующие числам из основного отрезка $I = [\lambda 2^i, (\lambda + 1) 2^i]$ — это всевозможные наборы $(\sigma_1, \dots, \sigma_{m-i}, \sigma_{m-i+1}, \dots, \sigma_m)$, у которых часть $(\sigma_1, \dots, \sigma_{m-i})$ фиксирована и $\lambda = \sum_{j=1}^{m-i} \sigma_j 2^{m-i-j}$. Поэтому характеристическая функция $\varphi_I(x_1, \dots, x_m)$ этого отрезка есть конъюнкция $x_1^{\sigma_1} \dots x_{m-i}^{\sigma_{m-i}}$.

Пусть $I(f)$ (соответственно $I_0(f)$) — минимальное число отрезков (соответственно основных отрезков), объединение которых составляет множество наборов, на которых f обращается в единицу.

Лемма 17. Пусть функция f зависит от m аргументов, а функции f^+ и f^- получаются из нее соответственно добавлением и удалением одной конъюнкции в совершенной д. н. ф. Тогда

$$I_0(f) \leq 2mI(f), \quad (4)$$

$$I_0(f^+) \leq I_0(f) + 1, \quad (5)$$

$$I_0(f^-) \leq I_0(f) + 2m. \quad (6)$$

Доказательство. Неравенство (4) следует из леммы 16. Неравенство (5) очевидно. Неравенство (6) вытекает из следующих соображений. При удалении одного набора основной отрезок, содержащий этот набор, распадается на не более чем два отрезка, один левый и один правый. Каждый из них есть объединение не более m основных отрезков (см. доказательство леммы 16).

§ 6. Основные блоки и их свойства

А. (E, t) -блок. Пусть E — элемент базиса не менее чем с двумя входами и t — целое неотрицательное число. Будем называть (E, t) -блоком правильную схему, построенную из элементов E и являющуюся t -ярусным деревом (рис. 4). Пусть E реализует функцию $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, имеет вес P и задержку T . Тогда (E, t) -блок состоит из $\frac{\kappa^t - 1}{\kappa - 1}$ элементов, имеет задержку tT , сложность $\frac{\kappa^t - 1}{\kappa - 1} P$, $N = \kappa^t$ входов и реализует некоторую функцию $F(y_0, \dots, y_{N-1})$, существенно зависящую от N аргументов (аргументы занумерованы в естественном порядке). В частности, схема, состоящая из одного полюса, является $(E, 0)$ -блоком. (E, l) -блоки ($0 \leq l \leq t$), входящие в состав (E, t) -блока и присоединенные к его входам, будем называть его *главными подсхемами*.

Множество переменных, приписанных входам любого (E, l) -блока, входящего в состав (E, t) -блока (а также множество номеров этих переменных), будем называть *интервалом* (высоты $t - l$) (переменных и номеров переменных соответственно). Очевидно, что интервал номеров переменных есть отрезок в смысле § 5.

Л е м м а 18. Пусть S есть (E, l) -блок; S_1, \dots, S_κ — его главные подсхемы, являющиеся $(E, l - 1)$ -блоками; J_1, \dots, J_κ — интервалы переменных этих подсхем и F', F_1, \dots, F_κ — функции, реализуемые схемами S, S_1, \dots, S_κ соответственно. Тогда для любого i ($1 \leq i \leq \kappa$) найдется

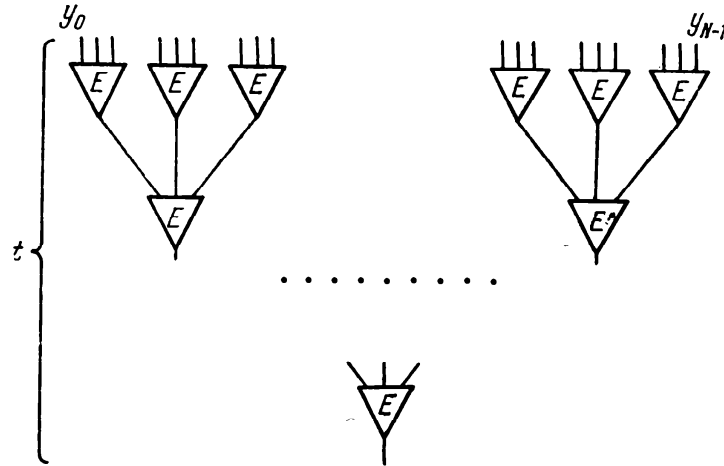


Рис. 4.

набор значений аргументов, не входящих в J_i , при подстановке которых на соответствующие места в функцию F' последняя переходит в функцию $F_i \oplus a_i$, где a_i равно 0 или 1.

Доказательство. Так как $\varphi(y_1, \dots, y_\kappa)$ существенно зависит от всех своих аргументов, то существует набор констант $a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_\kappa$ такой, что

$$\varphi(a_1, \dots, a_{i-1}, y_i, a_{i+1}, \dots, a_\kappa) = y_i \oplus a_i. \tag{7}$$

Далее, для каждой функции F_j ($j \neq i$) существует набор значений ее аргументов (т. е. аргументов из J_j), обращающий ее в a_j . Отсюда и из (7), поскольку $F' = \varphi(F_1, \dots, F_\kappa)$, следует утверждение леммы.

Л е м м а 19. Пусть $F(y_0, \dots, y_{N-1})$ — функция, реализуемая (E, t) -блоком S . Тогда существуют константы $c_{\eta, \zeta}$ ($0 \leq \eta, \zeta \leq N - 1$), обладающие следующими свойствами.

1) Пусть I — произвольный интервал номеров переменных и $\alpha \notin I$. Тогда все константы $c_{\beta, \alpha}$ при фиксированном α и любом β из I равны между собой.

2) $F(c_{\eta, 0}, c_{\eta, 1}, \dots, c_{\eta, \eta-1}, y_\eta, c_{\eta, \eta+1}, \dots, c_{\eta, N-1}) = y_\eta \oplus c_{\eta, \eta}$ ($\eta = 0, \dots, N - 1$).

Доказательство. Пусть S_1, \dots, S_κ — главные подсхемы схемы S , являющиеся $(E, t - 1)$ -блоками, F_1, \dots, F_κ — реализуемые ими функции и J_1, \dots, J_κ (соответственно I_1, \dots, I_κ) — интервалы переменных (соответственно номеров переменных) этих подсхем. В силу леммы 18 для любого i ($1 \leq i \leq \kappa$) существует набор констант $c_\gamma^{(i)}$ ($\gamma \notin I_i$; т. е. $\gamma \notin [(i - 1)\kappa^{t-1}, i\kappa^{t-1})$), при подстановке которых вместо переменных x_γ функция F переходит в $F_i \oplus a_i$ (a_i — некоторая константа). Положим теперь для всех пар (η, ζ) таких, что $\eta \in I_i, \zeta \in I_j$ и $i \neq j, c_{\eta, \zeta} = c_\zeta^{(i)}$. Очевидно, что эти константы $c_{\eta, \zeta}$ (это часть всех нужных констант) удовлетворяют условию 1).

Аналогично поступаем с «более мелкими» интервалами. Пусть, например, $S_{11}, \dots, S_{1\kappa}$ — главные подсхемы схемы S_1 , являющиеся $(E, t - 2)$ -блоками, и $J_{11}, \dots, J_{1\kappa}$ (соответственно $I_{11}, \dots, I_{1\kappa}$) — интервалы переменных (соответственно номеров переменных) этих подсхем. Применяя к схеме S_1 лемму 18, получаем, что для любого i ($1 \leq i \leq \kappa$) существуют константы

$c_{\gamma}^{(1, i)}$ ($\gamma \in I_1, \gamma \notin I_{1i}$), при подстановке которых вместо x_{γ} функция Φ_1 переходит в $F_{1i} \oplus a_{1i}$ (F_{1i} — функция, реализуемая схемой S_{1i} ; a_{1i} — некоторая константа). Положим теперь для всех (η, ζ) таких, что $\eta \in I_{1i}, \zeta \in I_{1j}, i \neq j, c_{\eta, \zeta} = c_{\zeta}^{(1, i)}$ и т. д. В конце концов для всех пар (η, ζ) таких, что $\eta \neq \zeta$, будут определены константы $c_{\eta, \zeta}$, удовлетворяющие условию 1) и такие, что для любого η

$$F(c_{\eta, 0}, \dots, c_{\eta, \eta-1}, y_{\eta}, c_{\eta, \eta+1}, \dots, c_{\eta, N-1}) = y_{\eta} \oplus c_{\eta, \eta},$$

где $c_{\eta, \eta}$ — некоторая константа.

Лемма доказана.

Б. Разбиение наборов.

Лемма 20*). Пусть элемент E имеет κ входов; $F(y_0, \dots, y_{N-1})$ — функция, реализуемая (E, t) -блоком; t — целое число и $M = \left\lceil \frac{2^m}{N} \right\rceil$. Тогда существуют

— нумерация Σ всех наборов длины t из нулей и единиц парами индексов: $\tilde{\sigma}_{l, \xi}$ ($0 \leq l \leq M-1; 0 \leq \xi \leq N-1$ **);

— система функций $\psi_{lh}(y_h, x_1, \dots, x_m)$, $0 \leq l \leq M-1, 0 \leq h \leq N-1$, обладающие свойствами:

(1) $F(\psi_{l, 0}(y_0, \tilde{\sigma}_{l, \xi}), \psi_{l, 1}(y_1, \tilde{\sigma}_{l, \xi}), \dots, \psi_{l, N-1}(y_{N-1}, \tilde{\sigma}_{l, \xi})) = y_{\xi}$; если $\tilde{\sigma} \notin \Sigma_l$, то

$$F(\psi_{l, 0}(y_0, \tilde{\sigma}), \psi_{l, 1}(y_1, \tilde{\sigma}), \dots, \psi_{l, N-1}(y_{N-1}, \tilde{\sigma})) = 0,$$

(2) любая функция ψ из множества $\Psi = \{\psi_{l, h}(\delta, x_1, \dots, x_m)\}$ ($0 \leq l \leq M-1, 0 \leq h \leq N-1, \delta = 0, 1$) удовлетворяет условию

$$I(\psi) \leq \kappa t + 2.$$

Доказательство. Сопоставим каждому набору $\tilde{\sigma}$ длины t из нулей и единиц пару чисел (λ, μ) , определяемых следующим образом: $|\tilde{\sigma}| = \lambda N + \mu$; $0 \leq \lambda$; $0 \leq \mu < N$. Очевидно, что λ и μ определяются по набору $\tilde{\sigma}$ однозначно. Занумеруем наборы $\tilde{\sigma}$ указанными парами индексов. Тем самым будет определено разбиение множества всех наборов $\tilde{\sigma}$ на упорядоченные подмножества Σ_l . Заметим, что наборы из Σ_l образуют отрезок.

Пусть теперь $c_{\eta, \zeta}$ ($0 \leq \eta, \zeta \leq N-1$) — набор констант, обладающих свойствами 1) и 2) (лемма 19), и $(\epsilon_0, \dots, \epsilon_{N-1})$ — такой набор, что

$$F(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{N-1}) = 0. \quad (8)$$

Определим теперь функции $\psi_{lh}(y_h, x_1, \dots, x_m)$ следующим образом:

$$\psi_{lh}(y_h, \tilde{\sigma}_{\lambda, \mu}) = \begin{cases} \epsilon_h, & \text{если } \lambda \neq l; \\ c_{\mu, h}, & \text{если } \lambda = l \text{ и } \mu \neq h; \\ y_h \oplus c_{h, h}, & \text{если } \lambda = l \text{ и } \mu = h. \end{cases}$$

Тогда свойство (1) функций $\psi_{l, h}$ следует из определения этих функций, свойства 2) констант (см. формулировку леммы 19) и (8).

Установим свойство (2). Определяемое (E, t) -блоком разбиение номеров переменных $0, 1, \dots, N-1$ на интервалы индуцирует разбиение каждого

*) Эта лемма характеризует строение функций ψ обобщенного разложения в случае, когда «внешняя функция» разложения является «однородной суперпозицией» функций, зависящих от ограниченного числа аргументов.

***) $0 \leq \xi \leq 2^m - 1 - (M-1)N$ при $l = M-1$.

из множеств Σ_l на подмножества, которые также будем называть интервалами *); в частности, интервалами будут и сами множества Σ_l . Ясно, что каждый из интервалов наборов является отрезком. Рассмотрим теперь следующую систему разбиений множества всех наборов $\tilde{\sigma}$ «относительно набора $\tilde{\sigma}_{l, h}$ ».

- 0) $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{M-1}$;
- 1) Σ_l разбивается на интервалы $\Sigma_{l_1}, \dots, \Sigma_{l_k}$ высоты 1;
- 2) пусть $\tilde{\sigma}_{l, h} \in \Sigma_{l_{i_1}}$. Интервал $\Sigma_{l_{i_1}}$ разбивается на интервалы $\Sigma_{l_{i_1, 1}}, \dots, \Sigma_{l_{i_1, k}}$ высоты 2. И т. д. Наконец,
- t) Пусть $\tilde{\sigma}_{l, h} \in \Sigma_{l, i_1, \dots, i_{t-1}}$. Интервал $\Sigma_{l, i_1, \dots, i_{t-1}}$ разбивается на интервалы $\Sigma_{l, i_1, \dots, i_{t-1}, 1}, \dots, \Sigma_{l, i_1, \dots, i_{t-1}, k}$ высоты t . Каждый из этих интервалов содержит ровно один набор; пусть $\Sigma_{l, i_1, \dots, i_t} = \{\tilde{\sigma}_{l, h}\}$.

Из определения функции $\psi_{lh}(y_h, x_1, \dots, x_m)$ и свойств констант c_n, ζ следует, что функция $\psi_{l, h}(\delta, x_1, \dots, x_m)$ постоянна на каждом из интервалов $\Sigma_i (i \neq l), \Sigma_{li} (i \neq i_1), \Sigma_{li_1 i} (i \neq i_2)$ и т. д., причем на всех интервалах $\Sigma_i (i \neq l)$ она равна ϵ_h . Таким образом, $\psi_{lh}(\delta, x_1, \dots, x_m)$ равна дизъюнкции характеристических функций тех из перечисленных интервалов, на которых она равна 1. Число таких интервалов, высота которых не менее 1, не превосходит κt . Интервалы высоты 0 составляют не более двух отрезков $\Sigma_0 \cup \dots \cup \Sigma_{l-1}$ и $\Sigma_{l+1} \cup \dots \cup \Sigma_{M-1}$ (или вообще не нужны). Окончательно имеем

$$I(\psi_{lh}(\delta, x_1, \dots, x_m)) \leq \kappa t + 2.$$

Лемма полностью доказана.

Из второго утверждения леммы 20 и из леммы 16 непосредственно вытекает

С л е д с т в и е.

$$I_0(\psi_{lh}(\delta, x_1, \dots, x_m)) \leq (\kappa t + 2) 2m.$$

В. (E, t, m) -блок и связанное с ним разложение функций. Пусть \mathfrak{A} есть (E, t) -блок и $M = \lfloor \frac{2m}{N} \rfloor$. (E, t, m) -блок \mathfrak{B} состоит из M экземпляров блока \mathfrak{A} , присоединенных к входам схемы $D_{M, M}$ (рис. 5); входам l -го блока \mathfrak{A} приписаны переменные

$$y_{l, 0}, \dots, y_{l, N-1} \quad (l = 0, 1, \dots, M-1).$$

Очевидно, что функция $\Phi(y_{0, 0}, \dots, y_{M-1, N-1})$ реализуемая (E, t, m) -блоком, равна $F(y_{0, 0}, \dots, y_{0, N-1}) \vee \dots \vee F(y_{M-1, 0}, \dots, y_{M-1, N-1})$. Из леммы 20 вытекает следующее свойство функции Φ .

Пусть $\tilde{\sigma}$ — произвольный набор длины m и $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_{l, h}$. Тогда $\Phi(\psi_{0, 0}(y_{0, 0}, \tilde{\sigma}), \dots, \psi_{0, N-1}(y_{0, N-1}, \tilde{\sigma}), \dots, \psi_{M-1, 0}(y_{M-1, 0}, \tilde{\sigma}), \dots$

$$\dots, \psi_{M-1, N-1}(y_{M-1, N-1}, \tilde{\sigma})) = y_{l, h}. \quad (9)$$

Ясно, что

$$L(\mathfrak{B}) = ML(\mathfrak{A}) + L(D_{M, M}) < \frac{\kappa^t M}{\kappa - 1} P + C_9 M, \quad (10)$$

$$T(\mathfrak{B}) = T(\mathfrak{A}) + T(D_{M, M}) < tT + C_{10} \log M. \quad (11)$$

Пусть Φ — функция, реализуемая (E, t, m) -блоком, а Σ и Ψ — соответствующие нумерация наборов длины m и система функций $\psi_{l, h}(\delta, \tilde{z})$

*) В множестве Σ_{M-1} образы некоторых интервалов могут быть короче или вообще отсутствовать.

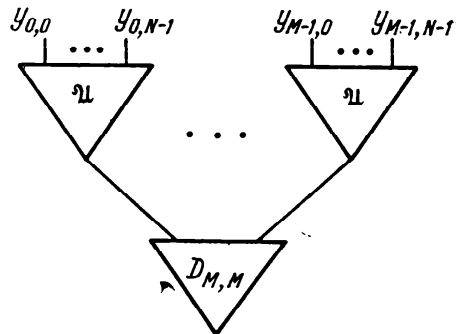


Рис. 5.

(лемма 20). Введем одно сокращенное обозначение, которое часто будет использоваться в дальнейшем. Пусть G — система функций $g_{l, h}(v_1, \dots, v_k)$ ($0 \leq l \leq M-1$, $0 \leq h \leq N-1$) и функция $g_{G, \Sigma}(\tilde{z}, \tilde{v})$ определяется следующим образом:

$$g_{G, \Sigma}(\tilde{\sigma}_{l, h}, v_1, \dots, v_k) = g_{l, h}(v_1, \dots, v_k).$$

Функцию

$$\Phi(\psi_{0, 0}(g_{0, 0}(\tilde{v}), \tilde{z}), \psi_{0, 1}(g_{0, 1}(\tilde{v}), \tilde{z}), \dots, \psi_{M-1, N-1}(g_{M-1, N-1}(\tilde{v}), \tilde{z}))$$

обозначим через $[\Phi, \Sigma, \Psi, G]$.

Лемма 21.

$$g_{G, \Sigma}(\tilde{z}, \tilde{v}) = [\Phi, \Sigma, \Psi, G].$$

Утверждение леммы непосредственно следует из определений функций $g_{G, \Sigma}$; $[\Phi, \Sigma, \Psi, G]$ и из (9).

Г. Одно обобщение. Будем рассматривать функции алгебры логики, зависящие от $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_w)$. Пусть \mathfrak{M} — некоторое множество наборов значений \tilde{x} . Две функции, $f(\tilde{x})$ и $g(\tilde{x})$, будем называть *равными на \mathfrak{M}* , если $f(\tilde{\alpha}) = g(\tilde{\alpha})$ для любого набора $\tilde{\alpha}$ из \mathfrak{M} (обозначение $f(\tilde{x}) \stackrel{\mathfrak{M}}{=} g(\tilde{x})$).

Для некоторых множеств равенство на них будет обозначаться специальным образом. Для множества \mathfrak{M}_0 , состоящего из всех наборов, за исключением $\tilde{0} = (0, \dots, 0)$ и $\tilde{1} = (1, \dots, 1)$, вместо знака $\stackrel{\mathfrak{M}_0}{=}$ будем использовать также знак \approx . Для множества $\mathfrak{M}_{a, b}$ наборов $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ длины $a+b$ ($\tilde{\alpha}$ имеет длину a , $\tilde{\beta}$ — длину b) таких, что $\tilde{\alpha} \neq \tilde{0}$, $\tilde{\alpha} \neq \tilde{1}$, $\tilde{\beta} \neq \tilde{0}$, $\tilde{\beta} \neq \tilde{1}$, вместо знака $\stackrel{\mathfrak{M}_{a, b}}{=}$ будем использовать также знак $\stackrel{a, b}{=}$.

Имеет место следующий аналог леммы 21.

Лемма 22. Пусть \mathfrak{M} — некоторое подмножество наборов значений (\tilde{u}, \tilde{v}) , $\tilde{u} = (u_1, \dots, u_m)$, $\tilde{v} = (v_1, \dots, v_k)$. Пусть системы функций $\Psi^* = \{\psi_{l, h}^*(y_{l, h}, \tilde{u})\}$ и $G^* = \{g^*(\tilde{\sigma}, \tilde{v})\}$ удовлетворяют условиям

$$\psi_{l, h}^*(\delta, \tilde{u}) \stackrel{\mathfrak{M}}{=} \psi_{l, h}(\delta, \tilde{u}); \quad g^*(\tilde{\sigma}, \tilde{v}) \stackrel{\mathfrak{M}}{=} g(\tilde{\sigma}, \tilde{v}).$$

Тогда

$$[\Phi, \Sigma, \Psi^*, G^*] \stackrel{\mathfrak{M}}{=} [\Phi, \Sigma, \Psi, G]^*.$$

Замечание 1. Если

$$\psi_{l, h}^*(\delta, \tilde{u}) \approx \psi_{l, h}(\delta, \tilde{u}), \quad g^*(\tilde{\sigma}, \tilde{v}) \approx g(\tilde{\sigma}, \tilde{v}),$$

то

$$[\Phi, \Sigma, \Psi^*, G^*] \stackrel{m, k}{=} [\Phi, \Sigma, \Psi, G].$$

Замечание 2. Если

$$\psi_{l, h}^*(\delta, \tilde{u}) \approx \psi_{l, h}(\delta, \tilde{u}), \quad g^*(\tilde{\sigma}, \tilde{u}) \approx g(\tilde{\sigma}, \tilde{u})$$

(функции $g^*(\tilde{\sigma}, \tilde{u})$ зависят от тех же переменных, что и функции $\psi_{l, h}(\delta, \tilde{u})$!), то

$$[\Phi, \Sigma, \Psi^*, G] \approx g(\tilde{u}, \tilde{u}).$$

) Ибо на наборах из \mathfrak{M} все «соответствующие друг другу» функции, входящие в $[\Phi, \Sigma, \Psi^, G^*]$ и в $[\Phi, \Sigma, \Psi, G]$, принимают равные значения.

§ 7. Разложение функций

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная функция алгебры логики. Ее переменные разобьем на три группы:

$$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_k), \quad \tilde{y} = (x_{k+1}, \dots, x_{k+u}), \quad \tilde{z} = (x_{k+u+1}, \dots, x_n);$$

обозначим $n - k - u$ через m . Обозначим через $f_{\tilde{\gamma}}(\tilde{x}, \tilde{y})$ функцию $f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\gamma})$.

Пусть E' — элемент базиса, на котором достигается τ . Пусть этот элемент имеет вес P' , задержку T' , и число его входов равно k' . Тогда $T' = \tau \log k'$. Пусть t' — некоторый параметр, удовлетворяющий условию (при $n \rightarrow \infty$)

$$\frac{(k')^{t'}}{2^m} \rightarrow 0. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь (E', t') -блок (и соответствующее разбиение Σ' наборов $\tilde{\gamma}$ длины m — лемма 20), (E', t', m) -блок \mathfrak{B}' (и соответствующие ему функцию Φ' и систему функций Ψ') и систему F' функций $f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\gamma}_i, h')$. Тогда функция $f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ допускает представление (лемма 21)

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = [\Phi', \Sigma', \Psi', F']. \tag{13}$$

Пусть $M' = \left\lceil \frac{2^m}{(k')^{t'}} \right\rceil$. Тогда в силу (12)

$$M' \sim \frac{2^m}{(k')^{t'}} \tag{14}$$

и для блока \mathfrak{B}' имеем (см. (10), (11))

$$\left. \begin{aligned} L(\mathfrak{B}') &< \frac{(k')^{t'} M'}{k' - 1} P' + C_9 M' \leq C_{11} 2^m, \\ T(\mathfrak{B}') &= t' T' + \lceil \log M' \rceil [T^{(1)} = \tau t' \log k' + \lceil \log M' \rceil T^{(1)}]. \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

Каждая функция $f_{\tilde{\gamma}}(\tilde{x}, \tilde{y})$ может быть задана таблицей с двумя входами (табл. 1).

Таблица 1

	0	.	β_1	.	1	x_{k+1}

$x_1 \dots x_k$	0	.	β_n	.	1	x_{k+u}
$0 \dots 0$.				A_1	} s
	.					
	.					} $s' \leq s$
$\alpha_1 \dots \alpha_k$.					
	.					} $s' \leq s$
	.					
	.					} $s' \leq s$
$1 \dots 1$.				A_p	

\uparrow
 $f_{\tilde{\gamma}}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_u)$

В этой таблице значение функции на наборе $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_n)$ помещается на пересечении строки, соответствующей $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, и столбца, соответствующего $(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Разобьем матрицу, определяющую значения функции $f_{\tilde{\gamma}}(\tilde{x}, \tilde{y})$, на полосы A_1, \dots, A_p , каждая из которых (кроме, быть может, последней) содержит s строк, а последняя содержит s' , $s' \leq s$, строк. Число p полос удовлетворяет условию

$$p \leq \frac{2^k}{s} + 1. \quad (16)$$

Обозначим через $f_{\tilde{\gamma}_{l', h', i}}$ функцию, совпадающую с $f_{\tilde{\gamma}_{l', h'}}$ на полосе A_i , и равную 0 вне полосы A_i . Ясно, что

$$f_{\tilde{\gamma}_{l', h'}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \bigvee_{i=1}^p f_{\tilde{\gamma}_{l', h', i}}(\tilde{x}, \tilde{y}). \quad (17)$$

Пусть E'' — элемент базиса, на котором достигается ρ . Пусть этот элемент имеет вес P'' , задержку T'' , и число его входов равно k'' . Тогда $P'' = \rho(k'' - 1)$. Пусть t'' — некоторый параметр, удовлетворяющий условиям

$$t'' \rightarrow \infty, \quad (18)$$

$$\frac{(k'')^{t''}}{2^u} \rightarrow 0. \quad (19)$$

Рассмотрим теперь (E'', t'') -блок (и соответствующее разбиение Σ'' наборов длины u — лемма 20), (E'', t'', u) -блок \mathfrak{B}'' (и соответствующие ему функцию Φ'' и систему функций Ψ'') и систему $F''_{l', h', i}$ функций $f_{\tilde{\gamma}_{l', h', i}}(\tilde{x}, \tilde{\beta}_{l', h'})$. Тогда функция $f_{\tilde{\gamma}_{l', h', i}}(\tilde{x}, \tilde{y})$ допускает представление

$$f_{\tilde{\gamma}_{l', h', i}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = [\Phi'', \Sigma'', \Psi'', F''_{l', h', i}]. \quad (20)$$

Пусть $M'' = \left] \frac{2^u}{(k'')^{t''}} \left[$. Тогда в силу (19), (18)

$$M'' \sim \frac{2^u}{(k'')^{t''}}, \quad M'' = o(2^u) \quad (21)$$

и для блока \mathfrak{B}'' имеем

$$\left. \begin{aligned} L(\mathfrak{B}'') &< \frac{(k'')^{t''} M''}{k'' - 1} P'' + C_9 M'' \leq \rho 2^u, \\ T(\mathfrak{B}'') &= t'' T'' + \lceil \log M'' \rceil T^{(1)} \leq C_{12} (t'' + u). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

§ 8. Метод синтеза схем в случае регулярного базиса

Схема будет иметь несколько «слоев» (отделенных друг от друга на рис. 6 горизонтальными линиями). Внутри каждого слоя схема состоит или из одинаковых элементов или из канонических схем с одинаковой задержкой. Схема будет состоять из блоков двух сортов:

— блоков, вычисляющих «содержательные» функции (обозначаемых буквой A с индексами);

— блоков согласования, используемых для согласования задержек разных частей схемы. К блокам согласования будут относиться также блоки, передающие константы (для изготовления задержек в соответствии с леммой 15). Блоки согласования будут обозначаться буквой Z с индексами.

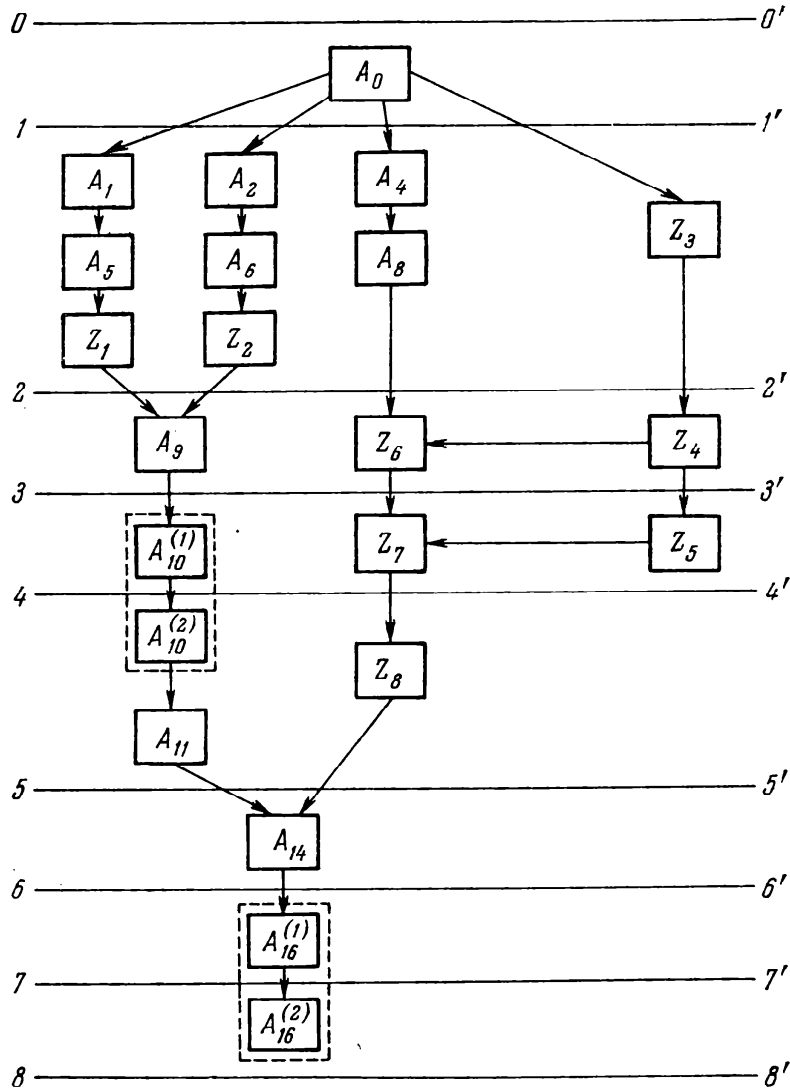


Рис. 6.

При описании блоков будет указываться их сложность, задержка и (в некоторых случаях) число выходов, обозначаемое буквой Ω .

В описаниях этого и двух следующих методов синтеза блоки, реализующие одинаковые (или аналогичные) функции, имеют одинаковые номера. Этим объясняются пропуски в нумерации блоков.

Если некоторый блок расположен внутри слоя, в котором элементы (канонические схемы) имеют задержку T , а весь слой — задержку tT , то выражение «блок реализует φ с любой задержкой» означает, что для любого i ($0 \leq i \leq t$) существует выход этого блока, на котором реализуется φ с задержкой iT (относительно входов этого блока).

Перейдем теперь непосредственно к описанию блоков схемы (см. рис. 6).

Блок A_0 реализует константы 0 , 1 , переменные x_1, \dots, x_n и их отрицания $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$. Так как базис регулярный, то это можно сделать

с одной и той же задержкой T_0 :

$$L(A_0) \leq C_{100}n, \quad T(A_0) = T_0.$$

Блок A_1 реализует конъюнкции $x_1^{\sigma_1} \dots x_k^{\sigma_k}$ (2^k штук) и константу 0 на основе уже реализованных блоком A_0 функций $0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$. Каждая конъюнкция реализуется схемой $K_{k,k}$ (лемма 8); константа 0 передается на выход схемы при помощи цепочки канонических схем S_1 . Поэтому

$$L(A_1) \leq C_{101}k2^k, \quad T(A_1) = \lceil \log k \rceil [T^{(1)}].$$

Блок A_2 реализует все конъюнкции $x_{k+1}^{\sigma_{k+1}} \dots x_{k+u}^{\sigma_{k+u}}$ и константу 0,

$$L(A_2) \leq C_{102}u2^u, \quad T(A_2) = \lceil \log u \rceil [T^{(1)}].$$

Блок A_4 реализует все конъюнкции $x_{n-m+1}^{\sigma_{n-m+1}} \dots x_{n-m+j}^{\sigma_{n-m+j}}$, $0 \leq j \leq m$ (при $j=0$ конъюнкция пустая и равна 1 тождественно; число всех функций равно 2^{m+1}) и константу 0;

$$L(A_4) \leq C_{103}m2^m, \quad T(A_4) = \lceil \log m \rceil [T^{(1)}].$$

Блок A_5 реализует всевозможные различные функции $f_{\tilde{\gamma}_{l', h', i}}(\tilde{x}, \tilde{\beta}_{l', h'})$.

Каждая из них получается как дизъюнкция не более s конъюнкций, реализованных блоком A_1 — с использованием одной схемы $D_{r,s}$ для некоторого r . Имеем

$$\Omega(A_5) \leq p2^s;$$

далее, в силу леммы 9

$$L(A_5) \leq C_{104}ps2^s; \quad T(A_5) = \lceil \log s \rceil [T^{(1)}].$$

Блок A_6 реализует всевозможные функции $\psi''_{l', h'}(\delta, \tilde{y})$, получающиеся из функций системы Ψ'' в результате подстановки констант 0 и 1 вместо первого аргумента. Каждая из них может быть получена как дизъюнкция не более 2^u конъюнкций*), реализованных блоком A_2 — с использованием одной схемы $D_{r, 2^u}$ для некоторого r . Имеем, учитывая (19),

$$\Omega(A_6) = 2M''(k'')^{t''} \leq C_{105}2^u;$$

$$L(A_6) \leq C_{106}M''(k'')^{t''}2^u \leq C_{107}2^{2u}; \quad T(A_6) = uT^{(1)}.$$

Блок A_8 реализует всевозможные функции $\psi'_{l', h'}(\delta, \tilde{z})$. В силу следствия из леммы 20 каждая из этих функций есть дизъюнкция не более $(k't' + 2)2m$ конъюнкций, реализованных блоком A_4 , и может быть получена с использованием одной схемы $D_{r, (k't'+2)2m}$. Имеем, учитывая (14),

$$\Omega(A_8) = 2M'(k')^{t_1} \leq C_{108}2^m.$$

Далее, так как k' — константа,

$$\left. \begin{aligned} m &\leq n, \\ t' &\leq C_{109}m \leq C_{109}n, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

то

$$(k't' + 2)2m \leq C_{110}n^2. \quad (24)$$

*) Здесь достаточно использовать очень грубую оценку сложности.

Поэтому

$$L(A_8) \leq C_{111} 2^m n^2; \quad T(A_8) =] \log((k't' + 2) 2m) [T^{(1)}.$$

Введем обозначение

$$T^* =] \log m [+] \log((k't' + 2) 2m) [.$$

Будем предполагать выполненными условия (при достаточно больших n)

$$] \log k [+] \log s [\leq T^*, \quad] \log u [+ u \leq T^*, \quad (25)$$

$$k = O(\log n) \quad (26)$$

Из (24) следует, что

$$T^* \leq C_{112} \log n. \quad (27)$$

Для выравнивания задержек схем $A_1 - A_5$, $A_2 - A_6$, $A_4 - A_8$ присоединим к выходам блоков A_5 и A_6 системы цепочек канонических схем S_1 соответствующей длины. Пусть Z_1 и Z_2 — блоки, состоящие из этих систем задержек:

$$L(Z_1) \leq C_{113} p 2^s \log n,$$

$$L(Z_2) \leq C_{114} 2^u \log n.$$

Блок A_9 реализует всевозможные различные суперпозиции *) $\psi''(f_{\tilde{\gamma}, i}(\tilde{x}, \tilde{\beta}), \tilde{y})$ на основе соотношения

$$\psi''(f_{\tilde{\gamma}, i}(\tilde{x}, \tilde{\beta}), \tilde{y}) = \zeta(f_{\tilde{\gamma}, i}(\tilde{x}, \tilde{\beta}), \psi''(0, \tilde{y}), \psi''(1, \tilde{y})).$$

Для реализации каждой из них используется одна схема S_9 :

$$L(A_9) \leq C_{115} 2^u p 2^s, \quad T(A_9) = T^{(4)}.$$

Блок A_{10} реализует все функции $f_{\tilde{\gamma}', h', i}(\tilde{x}, \tilde{y})$ в соответствии с представлением (20) (см. также стр. 58). При реализации каждой из этих функций используется один (E'', t'', u) -блок \mathfrak{B}'' . Поэтому (см. (22))

$$L(A_{10}) = M' (k')^{t'} p L(\mathfrak{B}''),$$

$$T(A_{10}) = T(\mathfrak{B}'') = t'' T'' +] \log M'' [T^{(1)}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\frac{2^k}{s} \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Из (14), (16), (28), (22) имеем

$$L(A_{10}) \leq \rho \frac{2^n}{s}.$$

Для удобства будем считать, что блок A_{10} состоит из двух частей; блока $A_{10}^{(1)}$, содержащего все элементы E'' ,

$$T(A_{10}^{(1)}) = t'' T'',$$

и блока $A_{10}^{(2)}$, содержащего остальные элементы,

$$T(A_{10}^{(2)}) =] \log M'' [T^{(1)}.$$

Из (19), (25), (21), (27) следует, что

$$t'' = O(\log n), \quad (29)$$

$$\log M'' = O(\log n). \quad (30)$$

*) Индексы β' , h' , β'' , h'' опускаем.

Блок A_{11} реализует функции $f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\gamma}_{l', h'})$ в соответствии с (17). Для одной функции используется одна схема $D_{p, p}$. Поэтому (см. (25), (26), (27))

$$\begin{aligned} L(A_{11}) &= 2^m L(D_{p, p}) \leq C_{116} p 2^m, \\ T(A_{11}) &=] \log p [T^{(1)} \leq C_{117} \log n. \end{aligned} \quad (31)$$

Блок Z_3 «передает константы 0 и 1» на уровень $2-2'$. Он состоит из двух цепочек схем S_1 . Из (27) следует, что

$$L(Z_3) \leq C_{118} \log n.$$

Блок Z_4 передает константы 0 и 1 на уровень $3-3'$ (см. лемму 15)

$$L(Z_4) \leq C_{119}.$$

Блок Z_5 реализует константы 0 и 1 со всеми задержками между $3-3'$ и $4-4'$ (см. замечание к лемме 15). Имеем, учитывая (29),

$$L(Z_5) \leq C_{120} t'' \leq C_{121} \log n.$$

Будем предполагать выполненным условие

$$t' \text{ и } t'' - \text{четные числа.} \quad (32)$$

Блок Z_6 передает функции блока A_8 на уровень $3-3'$ (см. замечание к лемме 15). Учитывая (14), имеем

$$L(Z_6) \leq C_{122} 2^m.$$

Блок Z_7 передает эти функции на уровень $4-4'$

$$L(Z_7) \leq C_{123} t'' 2^m \leq C_{124} 2^m \log n.$$

Блок Z_8 передает эти функции на уровень выходов блока A_{11} . Этот блок состоит из цепочек схем S_1 . Имеем (см. (30), (31))

$$L(Z_8) \leq C_{125} 2^m \log n.$$

Блок A_{14} реализует функции $\psi_{l', h'}(f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\gamma}_{l', h'}), \tilde{z})$ на основе соотношения

$$\psi_{l', h'}(f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\gamma}_{l', h'}), \tilde{z}) = \zeta(f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\gamma}_{l', h'}), \psi'(0, \tilde{z}), \psi'(1, \tilde{z}))$$

и устроен подобно блоку A_9 :

$$L(A_{14}) \leq C_{126} 2^m, \quad T(A_{14}) = T^{(4)}.$$

Блок A_{16} реализует функцию $f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ в соответствии с представлением (13). Этот блок является (E', t', m) -блоком \mathfrak{X}' . Поэтому (см. 15))

$$L(A_{16}) \leq C_{127} 2^m, \quad T(A_{16}) = \tau t' \log k' +] \log M' [T^{(1)}.$$

Положим теперь

$$\left. \begin{aligned} k &= [2 \log n], & u &= [2 \log n], & s &= [n - 5 \log n], \\ t' &= 2 \left[\frac{1}{2 \log k'} (n - 5 \log n) \right], & t'' &= 2 \left[\frac{\log n}{2 \log k''} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Тогда условия (12), (18), (19), (25), (26), (28), (32) выполнены. Легко проверить также, что в этом случае $L(A_{10}) \leq \rho \frac{2^n}{n}$ и $L(A_i) = o\left(\frac{2^n}{n}\right)$ при $i \neq 10$; $L(Z_i) = o\left(\frac{2^n}{n}\right)$. Далее, при $i \neq 16$ имеем $T(A_i) = O(\log n)$;

$$\log M' \leq m - t' \log k' + O(1) = \log n + O(1).$$

Поэтому

$$T(A_{16}) \leq \tau t' \log k' + O(\log n) \sim \tau n.$$

Таким образом, для всей схемы S имеем

$$L(S) \leq \rho \frac{2^n}{n}, \quad T(S) \leq \tau n.$$

Тем самым установлена верхняя оценка функций Шеннона в случае регулярного базиса.

З а м е ч а н и е. Для частного случая регулярного базиса, когда все элементы имеют целочисленные задержки и в базисе имеется единичная задержка, — метод синтеза несколько проще, чем в общем случае. В этом частном случае

1) не надо выравнивать задержки в каждом слое (достаточно только перед объединением схем);

2) вместо схем, основанных на лемме 15 и моделирующих цепочки задержек, можно применять «обычные» задержки. Поэтому вместо восьми блоков, так или иначе относящихся к выполнению функции задержки ($Z_1 - Z_8$), достаточно иметь лишь два (состоящие из цепочек единичных задержек):

- один для выравнивания задержек схем $A_1 - A_5$ и $A_2 - A_6$,
- второй для выравнивания задержек схемы (A_1, A_2, A_{11}) и $A_4 - A_8$.

§ 9. Метод синтеза схем для 0-функций в случае нерегулярного базиса *)

А. Вспомогательные функции и дополнительное разложение 0-функций.
Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \kappa_0(u_1, \dots, u_a) &= \bar{u}_1 \bar{u}_2 \dots \bar{u}_a, & \kappa_1(u_1, \dots, u_a) &= u_1 u_2 \dots u_a, \\ \lambda_a(u_1, \dots, u_a) &= \bar{\kappa}_0(u_1, \dots, u_a) \bar{\kappa}_1(u_1, \dots, u_a), \\ \mu_{a,b}(u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b) &= \lambda_a(u_1, \dots, u_a) \lambda_b(v_1, \dots, v_b) **). \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \lambda_a(u_1, \dots, u_a) &= (u_1 \vee \dots \vee u_a) (\bar{u}_1 \vee \dots \vee \bar{u}_a) = \\ &= u_1 \bar{u}_2 \vee u_2 \bar{u}_3 \vee \dots \vee u_{a-1} \bar{u}_a \vee u_a \bar{u}_1. \end{aligned} \quad (34)$$

Определим следующие функции от переменных x_1, \dots, x_n (переменные будем предполагать разбитыми на три группы, $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$, содержащие k, u и m переменных соответственно; см. § 7).

1. Функции от $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ (табл. 2):

$$\begin{aligned} e_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \mu_{k+u, m}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \lambda_{k+u}(\tilde{x}, \tilde{y}) \lambda_m(\tilde{z}), \\ e_2(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \kappa_0(\tilde{x}, \tilde{y}) \lambda_m(\tilde{z}), & e_3(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \kappa_1(\tilde{x}, \tilde{y}) \lambda_m(\tilde{z}), \\ e_4(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \kappa_0(\tilde{z}) \lambda_{k+u}(\tilde{x}, \tilde{y}), & e_5(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \kappa_1(\tilde{z}) \lambda_{k+u}(\tilde{x}, \tilde{y}), \\ e_6(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \kappa_1(\tilde{x}, \tilde{y}) \kappa_0(\tilde{z}) = x_1 \dots x_{k+u} \bar{x}_{k+u+1} \dots \bar{x}_n, \\ e_7(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \kappa_0(\tilde{x}, \tilde{y}) \kappa_1(\tilde{z}) = \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{k+u} x_{k+u+1} \dots x_n. \end{aligned}$$

*) Этот метод применим и для регулярного базиса, однако он является содержательным лишь в случае нерегулярного базиса.

**) Эта функция является характеристической функцией множества $\mathfrak{M}_{a,b}$, введенного в § 6.

Таблица 2

\tilde{x}, \tilde{y}	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$
$\tilde{0}, \tilde{0}$		e_2
	e_4	e_5
$\tilde{1}, \tilde{1}$	e_6	e_3

Таблица 3

\tilde{z}	\tilde{x}	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	\tilde{y}
$\tilde{0}$			d_2	
		d_1		
$\tilde{1}$	d_2			

2. Функции от \tilde{x}, \tilde{y} (табл. 3)

$$d_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mu_{k, u}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lambda_k(\tilde{x}) \lambda_u(\tilde{y}),$$

$$d_2(\tilde{x}, \tilde{y}) = \kappa_0(\tilde{x}) \bar{\kappa}_0(\tilde{y}) \vee \kappa_0(\tilde{y}) \bar{\kappa}_0(\tilde{x}) \vee \kappa_1(\tilde{x}) \bar{\kappa}_1(\tilde{y}) \vee \kappa_1(\tilde{y}) \bar{\kappa}_1(\tilde{x}).$$

Пусть далее для произвольной 0-функции $f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$

$$f^{(i)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) e_i(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad 1 \leq i \leq 7.$$

Так как $f(\tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{0}) = f(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{1}) = 0$, то

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \bigvee_{i=1}^7 f^{(i)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}).$$

Для каждой функции $f_{\tilde{\gamma}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\gamma})$ (см. § 7) определим функции

$$f_{\tilde{\gamma}}^{(i)}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f_{\tilde{\gamma}}(\tilde{x}, \tilde{y}) d_i(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad i = 1, 2,$$

$$f_{\tilde{\gamma}}^{(0)}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f_{\tilde{\gamma}}^{(1)}(\tilde{x}, \tilde{y}) \vee f_{\tilde{\gamma}}^{(2)}(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Из приведенных выше определений вытекают следующие свойства:

1) $\gamma_{\tilde{\gamma}}^{(0)}(\tilde{x}, \tilde{y}) \approx f_{\tilde{\gamma}}(\tilde{x}, \tilde{y})$;

2) если некоторая функция $g(\tilde{x}, \tilde{y})$ удовлетворяет условию

$$g(\tilde{x}, \tilde{y}) \stackrel{h, u}{=} f_{\tilde{\gamma}}(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad \text{то} \quad f_{\tilde{\gamma}}^{(1)}(\tilde{x}, \tilde{y}) = g(\tilde{x}, \tilde{y}) d_1(\tilde{x}, \tilde{y});$$

2') аналогично, если некоторая функция $g(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ удовлетворяет условию $g(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \stackrel{h+u, m}{=} f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, то $f^{(1)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = g(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) e_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$;

3) $f^{(4)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = f_{\tilde{0}}^{(0)}(\tilde{x}, \tilde{y}) e_4(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$,

$$f^{(5)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = f_{\tilde{1}}^{(0)}(\tilde{x}, \tilde{y}) e_5(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}).$$

Б. Метод синтеза схем. Этот метод является более громоздким, чем в случае регулярного базиса. Для облегчения его описания будут указаны лишь блоки, выполняющие содержательные функции. «Блоки задержки», используемые для согласования задержек, на рисунке 7 изображены жирными линиями. Сложность блоков задержки будет оценена в конце. При описании метода будут использоваться обозначения из § 7. Значения параметров здесь те же, что и в § 8. Поэтому выполнены условия (12), (18), (19), (25), (26), (28), (32).

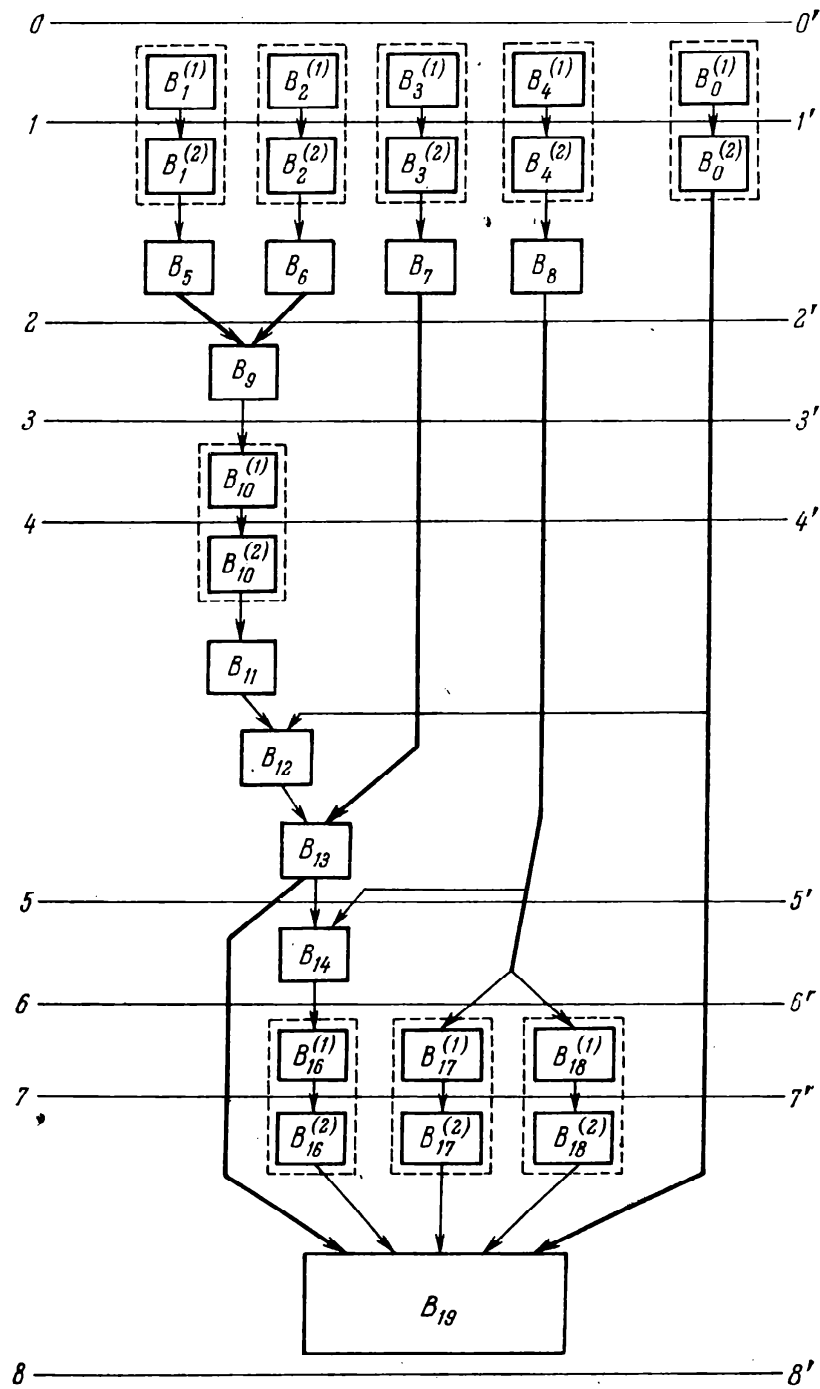


Рис. 7.

Перейдем теперь к описанию блоков.

Блок B_0 (рис. 8) реализует вспомогательные функции: $0, 1, e_i$ ($1 \leq i \leq 7$), d_1 . Он состоит из блоков $B_{00} - B_{04}$.

Блок B_{00} реализует константы (для использования их в блоках задержки). Он состоит из канонических схем S_4 и S_5 (лемма 10)

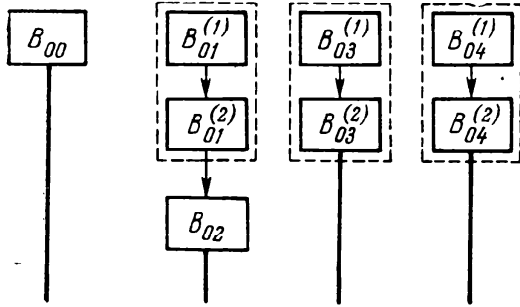


Рис. 8.

$$L(B_{00}) = C_{200}, \quad T(B_{00}) = T^{(2)}.$$

Блок B_{01} реализует функции $\lambda_k(\tilde{x})$, $\lambda_u(\tilde{y})$, $\lambda_{k+u}(\tilde{x}, \tilde{y})$ и $\lambda_m(\tilde{z})$ в соответствии с (34)

$$L(B_{01}) \leq C_{201}n,$$

$$T(B_{01}) = T^{(2)} +] \log n [T^{(1)}.$$

Блок B_{02} реализует $d_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lambda_k(\tilde{x})\lambda_u(\tilde{y})$ и $e_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \lambda_{k+u}(\tilde{x}, \tilde{y})\lambda_m(\tilde{z})$

$$L(B_{02}) = C_{202}, \quad T(B_{02}) = T^{(1)}.$$

Блок B_{03} реализует функции $e_2 - e_5$ на основе представления

$$e_2(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n-m} x_{n-m+1} \bar{x}_{n-m+2} \vee \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n-m} x_{n-m+2} \bar{x}_{n-m+3} \vee \dots \\ \dots \vee \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n-m} x_{n-1} \bar{x}_n \vee \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n-m} x_n \bar{x}_{n-m+1} \quad (35)$$

и аналогичных ему с использованием леммы 11 и схем $D_{r'', n}$

$$L(B_{03}) \leq C_{203}n^2, \quad T(B_{03}) = T^{(2)} + 2] \log n [T^{(1)}.$$

Блок B_{04} реализует функции e_6 и e_7

$$L(B_{04}) \leq C_{204}n, \quad T(B_{04}) = T^{(2)} +] \log n [T^{(1)}.$$

Таким образом,

$$L(B_0) \leq C_{205}n^2,$$

$$\max(T(B_{00}), T(B_{01} - B_{02}), T(B_{03}), T(B_{04})) \leq 2T^{(1)} \log n.$$

Блоки B_1 и B_2 реализуют соответственно системы конъюнкций $K^0(\tilde{x})$ и $K^0(\tilde{y})$, а также константу 0. Имеем (см. лемму 11)

$$L(B_1) \leq C_{206}k2^k, \quad T(B_1) = T^{(2)} +] \log k [T^{(1)},$$

$$L(B_2) \leq C_{207}u2^u, \quad T(B_2) = T^{(2)} +] \log u [T^{(1)}.$$

Блок B_3 реализует константу 0 и всевозможные конъюнкции $x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k} x_{k+1}^{\beta_1} \dots x_{k+u}^{\beta_u}$, которые соответствуют наборам $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_u)$, удовлетворяющим условию

$$(\tilde{\alpha} = \tilde{0} \& \tilde{\beta} \neq \tilde{0}) \vee (\tilde{\alpha} = \tilde{1} \& \tilde{\beta} \neq \tilde{1}) \vee (\tilde{\alpha} \neq \tilde{0} \& \tilde{\beta} = \tilde{0}) \vee (\tilde{\alpha} \neq \tilde{1} \& \tilde{\beta} = \tilde{1}).$$

Число таких конъюнкций меньше, чем (см. (33)) $2(2^k + 2^u) = 2^{u+2}$. Поэтому (лемма 11)

$$L(B_3) \leq C_{208}u2^u,$$

$$T(B_3) = T^{(2)} +] \log(k+u) [T^{(1)}.$$

Блок B_4 реализует все конъюнкции $x_{n-m+1}^{\sigma} \dots x_{n-m+j}^{\sigma}$, $1 \leq j \leq m$, содержащие хотя бы одну переменную с отрицанием и хотя бы одну

переменную без отрицания и константу 0:

$$L(B_4) \leq C_{209} m 2^m, \\ T(B_4) = T^{(2)} +] \log m [T^{(1)}.$$

Блок B_5 реализует множество всех функций $h(\tilde{x})$, обладающих свойствами:

а) $h(\tilde{0}) = 0, h(\tilde{1}) = 0;$

б) $h(\tilde{x})$ вне некоторой полосы (см. табл. 1) равна 0. Очевидно, что для каждой функции $f_{\tilde{\gamma}_{l', h', i}}(\tilde{x}, \tilde{\beta}_{l'', h''})$ существует такая функция $h(\tilde{x})$, что $f_{\tilde{\gamma}_{l', h', i}}(\tilde{x}, \tilde{\beta}_{l'', h''}) \approx h(\tilde{x})$; эту функцию $h(\tilde{x})$ будем обозначать также $f_{\tilde{\gamma}_{l', h', i}}^0(\tilde{x}, \tilde{\beta}_{l'', h''})$. Систему всех функций $f_{\tilde{\gamma}_{l', h', i}}^0(\tilde{x}, \tilde{\beta}_{l'', h''})$ при фиксированных l', h', i будем обозначать через $F_{l', h', i}^0$. Ясно, что каждая функция $h(\tilde{x})$ есть дизъюнкция не более s конъюнкций из $K^0(\tilde{x})$. В силу леммы 9

$$L(B_5) \leq C_{210} p s 2^s, \quad T(B_5) =] \log s [T^{(1)}, \quad \Omega(B_5) \leq p 2^s.$$

Блок B_6 реализует функции $\psi_{l'', h''}^0(\delta, \tilde{y}) = \psi_{l'', h''}(\delta, \tilde{y}) \bar{\kappa}_0(\tilde{y}) \bar{\kappa}_1(\tilde{y})$ как дизъюнкции конъюнкций из $K_u^0(\tilde{y})$

$$L(B_6) \leq C_{211} 2^{2u}, \quad T(B_6) = u T^{(1)}, \quad \Omega(B_6) \leq C_{212} 2^u.$$

Очевидно, что

$$\psi_{l'', h''}^0(\delta, \tilde{y}) \approx \psi_{l'', h''}(\delta, \tilde{y}).$$

Систему функций

$$\psi_{l'', h''}^0(0, \tilde{y}) \bar{y}_{l'', h''} \vee \psi_{l'', h''}^0(1, \tilde{y}) y_{l'', h''} = \zeta(y_{l'', h''}, \psi_{l'', h''}^0(0, \tilde{y}), \psi_{l'', h''}^0(1, \tilde{y}))$$

обозначим через Ψ''^0 .

Блок B_8 реализует функции $\psi_{l', h'}^{0j}(\delta, \tilde{z}) = \psi_{l', h'}(\delta, \tilde{z}) \bar{\kappa}_0(\tilde{z}) \bar{\kappa}_1(\tilde{z})$, аналогичные функциям $\psi_{l'', h''}^0(\delta, \tilde{y})$. Поэтому

$$\psi_{l', h'}^{0j}(\delta, \tilde{z}) \approx \psi_{l', h'}(\delta, \tilde{z}). \tag{36}$$

Функция $\psi_{l', h'}^{0j}(\delta, \tilde{z})$ отличается от $\psi_{l', h'}(\delta, \tilde{z})$ не более чем на двух наборах. Поэтому в силу леммы 17 и следствия из леммы 20

$$I_0(\psi_{l', h'}^{0j}(\delta, \tilde{z})) \leq I_0(\psi_{l', h'}(\delta, \tilde{z})) + 4m \leq (k' t' + 4) 2m.$$

Так как $\psi_{l', h'}^{0j}(\delta, \tilde{0}) = \psi_{l', h'}^{0j}(\delta, \tilde{1}) = 0$, то для образования $\psi_{l', h'}^{0j}(\delta, \tilde{z})$ используются лишь конъюнкции, реализованные блоком B_4 . Поэтому (см. (14))

$$L(B_8) \leq C_{213} M' (k')^{t'} (k' t' + 4) 2m \leq C_{214} 2^m n^2,$$

$$T(B_8) =] \log ((k' t' + 4) 2m) [T^{(1)}, \quad \Omega(B_8) = C_{215} 2^m.$$

Систему функций

$$\psi_{l', h'}^{0j}(0, \tilde{z}) \bar{z}_{l', h'} \vee \psi_{l', h'}^{0j}(1, \tilde{z}) z_{l', h'} = \zeta(z_{l', h'}, \psi_{l', h'}^{0j}(0, \tilde{z}), \psi_{l', h'}^{0j}(1, \tilde{z}))$$

обозначим через Ψ'^0 .

Блок B_7 реализует функции $f_{\tilde{\gamma}}^{(2)}(\tilde{x}, \tilde{y})$ (см. стр. 66) на основе конъюнкций, реализованных блоком B_3 ,

$$L(B_7) \leq C_{216} 2^{u+m}, \quad T(B_7) = (u+2) T^{(1)}, \quad \Omega(B_7) = 2^m.$$

Легко проверить, что из схем $B_0, B_1—B_5, B_2—B_6, B_3—B_7, B_4—B_8$ наибольшую задержку имеет схема $B_4—B_8$:

$$T^{(2)} +] \log m [+] \log ((k't' + 4) 2m) [] T^{(1)} \sim 3T^{(1)} \log n.$$

Этой величиной определяется задержка всей схемы между $1—1'$ и $2—2'$.

Блок B_9 аналогичен блоку A_9 . Он реализует функции*)

$$\zeta(f_{\tilde{\gamma}, i}^0(\tilde{x}, \tilde{\beta}), \psi''^0(0, \tilde{y}), \psi''^0(1, \tilde{y})),$$

$$L(B_9) \leq C_{217} 2^u p 2^s, \quad T(B_9) = T^{(4)}.$$

Блок B_{10} аналогичен блоку A_{10} . Он реализует систему функций $[\Phi'', \Sigma'', \Psi''^0, F_{l', h', i}''^0]$;

$$L(B_{10}) \leq \rho \frac{2^n}{n}, \quad T(B_{10}) = t'' T'' +] \log M'' [T^{(1)}.$$

Так как $f_{\tilde{\gamma}l', h', i}^0(\tilde{x}, \tilde{\beta}l', h'') \approx f_{\tilde{\gamma}l', h', i}(\tilde{x}, \tilde{\beta}l', h'')$ и $\psi_{l', h''}''^0(\delta, \tilde{y}) \approx \psi_{l', h''}''(\delta, \tilde{y})$, то в силу леммы 22

$$[\Phi'', \Sigma'', \Psi''^0, F_{l', h', i}''^0] \stackrel{k, u}{=} f_{\tilde{\gamma}l', h', i}(\tilde{x}, \tilde{y}). \quad (37)$$

Блок B_{11} реализует функции $f_{\tilde{\gamma}l', h'}^*(\tilde{x}, \tilde{y}) = \bigvee_i [\Phi'', \Sigma'', \Psi''^0, F_{l', h', i}''^0]$.

$$L(B_{11}) \leq C_{218} p 2^m, \quad T(B_{11}) =] \log p [T^{(1)}$$

Из (37) следует, что

$$f_{\tilde{\gamma}l', h'}^*(\tilde{x}, \tilde{y}) \stackrel{k, u}{=} f_{\tilde{\gamma}l', h'}(\tilde{x}, \tilde{y}). \quad (38)$$

Блок B_{12} реализует функции $f_{\tilde{\gamma}}^{(1)}(\tilde{x}, \tilde{y})$ на основе представления (см. (38) и свойство 2 на стр. 66) $f_{\tilde{\gamma}}^{(1)}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f_{\tilde{\gamma}}^*(\tilde{x}, \tilde{y}) d_1(\tilde{x}, \tilde{y})$;

$$L(B_{12}) \leq C_{219} 2^m, \quad T(B_{12}) = T^{(1)}.$$

Блок B_{13} реализует функции $f_{\tilde{\gamma}}^{(0)}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f_{\tilde{\gamma}}^{(1)}(\tilde{x}, \tilde{y}) \bigvee_{\tilde{\gamma}} f_{\tilde{\gamma}}^{(2)}(\tilde{x}, \tilde{y})$;

$$L(B_{13}) \leq C_{220} 2^m, \quad T(B_{13}) = T^{(1)}.$$

Ясно, что

$$f_{\tilde{\gamma}}^{(0)}(\tilde{x}, \tilde{y}) \approx f_{\tilde{\gamma}}(\tilde{x}, \tilde{y}). \quad (39)$$

Систему функций $f_{\tilde{\gamma}l', h'}^{(0)}(\tilde{x}, \tilde{y})$ обозначим через F'^0 .

Блок B_{14} реализует функции $\zeta(f_{\tilde{\gamma}l', h'}^0(\tilde{x}, \tilde{y}), \psi_{l', h'}^0(0, \tilde{z}), \psi_{l', h'}^0(1, \tilde{z}))$;

$$L(B_{14}) \leq C_{221} 2^m, \quad T(B_{14}) = T^{(4)}.$$

Блок B_{16} реализует функцию $f^*(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = [\Phi', \Sigma', \Psi'^0, F'^0]$ при помощи одного блока \mathfrak{B}' . Имеем (см. (15))

$$L(B_{16}) \leq C_{222} 2^m, \quad T(B_{16}) = \tau t' \log k' +] \log M' [T^{(1)}.$$

В силу леммы 22, (36), (39)

$$f^*(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \stackrel{k+u, m}{=} f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}).$$

*) Индексы l', h', l'', h'' опускаем.

Обозначим через F'_ε ($\varepsilon = 0, 1$) систему функций $f(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\gamma})$ (это система констант; набор $\tilde{\gamma}$ пробегает все наборы длины m).

Блок B_{17} реализует функцию $f_0^*(\tilde{z}) = [\Phi', \Sigma', \Psi'^0, F'_0]$ (при помощи одного блока \mathfrak{B}' ; заметим, что

$$\zeta(f(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\gamma}_{l', h'}), \psi_{l', h'}^{\prime 0}(0, \tilde{z}), \psi_{l', h'}^{\prime 0}(1, \tilde{z})) = \psi_{l', h'}^{\prime 0}(f(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\gamma}_{l', h'}), \tilde{z}),$$

т. е. совпадает с некоторой функцией $\psi_{l', h'}^{\prime 0}(\delta, \tilde{z})$,

$$L(B_{17}) \leq C_{223} 2^m.$$

В силу леммы 22

$$f_0^*(\tilde{z}) \approx f(\tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{z}).$$

Блок B_{18} аналогичным образом реализует $f_1^*(\tilde{z}) = [\Phi', \Sigma', \Psi'^0, F'_1]$;

$$f_1^*(\tilde{z}) \approx f(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{z});$$

$$L(B_{18}) \leq C_{224} 2^m.$$

Блок B_{19} реализует $f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ в соответствии с представлением

$$f^{(1)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = f^*(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) e_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad f^{(2)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = f_0^*(\tilde{z}) e_2(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}),$$

$$f^{(3)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = f_1^*(\tilde{z}) e_3(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad f^{(4)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = f_{\tilde{0}}(\tilde{x}, \tilde{y}) e_4(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}),$$

$$f^{(5)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = f_{\tilde{1}}(\tilde{x}, \tilde{y}) e_5(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad f^{(6)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = f(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}) e_6(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}),$$

$$f^{(7)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = f(\tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{1}) e_7(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \bigvee_{i=1}^7 f^{(i)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}).$$

Функции $f^*(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, $f_0^*(\tilde{z})$, $f_1^*(\tilde{z})$ реализованы блоками B_{16} , B_{17} , B_{18} ; функции $f_{\tilde{0}}(\tilde{x}, \tilde{y})$, $f_{\tilde{1}}(\tilde{x}, \tilde{y})$ — блоком B_{13} (вместе с другими функциями $f_{\tilde{\gamma}}(\tilde{x}, \tilde{y})$); константы $f(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0})$ и $f(\tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{1})$ — блоком B_0 ; функции $e_i(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ — блоком B_0 ;

$$L(B_{19}) \leq C_{225}, \quad T(B_{19}) = 4T^{(1)}$$

(один ярус схем S_2 и схема $D_{7,8}$).

Легко проверить (так же, как и для метода синтеза из § 8), что при $i \neq 10$ $L(B_i) = o\left(\frac{2^n}{n}\right)$ и $L(B_{10}) \leq \rho \frac{2^n}{n}$;

$$T(B_j) = O(\log n) \quad \text{при } j \neq 16, 17, 18,$$

$$T(B_{16}) = T(B_{17}) = T(B_{18}) \sim \tau n.$$

Таким образом, задержка всей схемы не превосходит $C_{226}n$; поэтому сумма сложностей всех схем задержки (изображенных жирными линиями) не превосходит

$$\begin{aligned} C_{227}(\Omega(B_0) + \Omega(B_5) + \Omega(B_6) + \Omega(B_7) + \Omega(B_8) + \Omega(B_{13}))n &\leq \\ &\leq C_{228}(p2^s + 2^u + 2^m + 1)n + o\left(\frac{2^n}{n}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, для полученной правильной схемы S имеем

$$L(S) \leq \rho \frac{2^n}{n}, \quad T(S) \sim \tau n.$$

§ 10. Метод синтеза схем для x -функций в случае нерегулярного базиса

Этот метод аналогичен методу синтеза схем для 0-функций, однако имеются следующие основные отличия.

I. Вместо элементов E' и E'' (на которых достигаются τ и ρ соответственно) используются элементы E''' и E^{IV} (на которых достигаются τ^* и ρ^* , см. § 1).

II. Вместо вспомогательных функций e_i и d_i используются их аналоги $e_i(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \vee \kappa_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ и $d_i(\tilde{x}, \tilde{y}) \vee \kappa_1(\tilde{x}, \tilde{y})$.

III. Не применяется конструкция леммы 15 для образования задержек. Рассмотрим эти отличия более подробно.

I. Пусть E''' — элемент базиса, на котором достигается τ^* ; это ϕ -элемент. Пусть этот элемент имеет вес P''' , задержку T''' и число его входов равно k''' . Тогда $T''' = \tau^* \log k'''$. В описываемом методе будет использоваться (E''', t''', m) -блок \mathfrak{B}''' (вместо блока \mathfrak{B}'), определяемая им нумерация Σ''' наборов длины m , соответствующие ему функция Φ''' и система функций Ψ''' , а также система функций F''' (фактически «старая» система функций $f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\gamma})$, только наборы $\tilde{\gamma}$ в ней по-новому занумерованы парами индексов) и основанное на них представление

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}, z) = [\Phi''', \Sigma''', \Psi''', F''']. \quad (40)$$

В соответствии с новой нумерацией наборов длины m определяется система функций $f_{\tilde{\gamma}l''', h''', i}(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Пусть E^{IV} — элемент базиса, на котором достигается ρ^* . Пусть этот элемент имеет вес P^{IV} , задержку T^{IV} , и число его входов равно k^{IV} . Тогда $P^{IV} = \rho^* (k^{IV} - 1)$. В описываемом методе будет использоваться (E^{IV}, t^{IV}, u) -блок \mathfrak{B}^{IV} (вместо блока \mathfrak{B}''), определяемая им нумерация Σ^{IV} , соответствующие ему функция Φ^{IV} и система функций Ψ^{IV} , а также системы функций $F_{l''', h''', i}^{IV}$ (фактически совпадающие с системами $F_{l'', h'', i}''$) и основанные на них представления

$$f_{\tilde{\gamma}l''', h''', i}(\tilde{x}, \tilde{y}) = [\Phi^{IV}, \Sigma^{IV}, \Psi^{IV}, F_{l''', h''', i}^{IV}]. \quad (41)$$

Аналогичным образом определяются числа

$$M''' = \left\lceil \frac{2^m}{(k''')^{t'''}} \right\rceil \quad \text{и} \quad M^{IV} = \left\lceil \frac{2^u}{(k^{IV})^{t^{IV}}} \right\rceil.$$

Значения параметров выбираются аналогичным образом:

$$k = \lceil 2 \log n \rceil, \quad u = \lceil 2 \log n \rceil, \quad s = \lceil n - 5 \log n \rceil, \\ t''' = 2 \left\lceil \frac{1}{2 \log k'''} (n - 5 \log n) \right\rceil, \quad t^{IV} = 2 \left\lceil \frac{\log n}{2 \log k^{IV}} \right\rceil.$$

В этом случае

$$\left. \begin{aligned} L(\mathfrak{B}''') &\leq C_{300} 2^m = o\left(\frac{2^n}{n}\right), \\ T(\mathfrak{B}''') &= \tau^* t''' \log k''' + \lceil \log M''' \rceil [T^{(1)} \sim \tau^* n, \\ L(\mathfrak{B}^{IV}) &\leq \rho^* 2^u, \\ T(\mathfrak{B}^{IV}) &= t^{IV} T^{IV} + \lceil \log M^{IV} \rceil [T^{(1)} = O(\log n). \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

II. Введем функции (см. § 9. А)

$$\begin{aligned} e_{10+i}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= e_i(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \vee \kappa_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), & 1 \leq i \leq 7, \\ d_{10+i}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= d_i(\tilde{x}, \tilde{y}) \vee \kappa_1(\tilde{x}, \tilde{y}), & 1 \leq i \leq 2. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Пусть $a_{ij}(x_1, \dots, x_a)$ есть А-функция $x_1 x_2 \dots x_a \vee x_i \bar{x}_j$. Из определения функции d_{11} и из (34) следует равенство

$$\begin{aligned} d_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= (\lambda_k(\tilde{x}) \vee \kappa_1(\tilde{x}, \tilde{y})) \& (\lambda_u(\tilde{y}) \vee \kappa_1(\tilde{x}, \tilde{y})) = \\ &= (a_{12}(\tilde{x}, \tilde{y}) \vee a_{23}(\tilde{x}, \tilde{y}) \vee \dots \vee a_{k-1, k}(\tilde{x}, \tilde{y}) \vee a_{k, 1}(\tilde{x}, \tilde{y})) \& \\ &\& (a_{k+1, k+2}(\tilde{x}, \tilde{y}) \vee a_{k+2, k+3}(\tilde{x}, \tilde{y}) \vee \dots \vee a_{k+u-1, k+u}(\tilde{x}, \tilde{y}) \vee a_{k+u, k+1}(\tilde{x}, \tilde{y})). \end{aligned} \quad (43)$$

Аналогичное представление справедливо для функции $e_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$.

Для произвольной x -функции $f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ положим

$$f^{(j)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) e_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad 11 \leq j \leq 17.$$

Так как $f(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}) = 0$, то

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \bigvee_{j=11}^{17} f^{(j)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}).$$

Заметим еще, что

$$f^{(j)}(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}) = 1. \quad (44)$$

Для каждой функции $f_{\tilde{\gamma}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\gamma})$ положим

$$\left. \begin{aligned} f_{\tilde{\gamma}}^{(j)}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= f_{\tilde{\gamma}}(\tilde{x}, \tilde{y}) d_j(\tilde{x}, \tilde{y}), & j = 11, 12, \\ f_{\tilde{\gamma}}^{(10)}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= f_{\tilde{\gamma}}^{(11)}(\tilde{x}, \tilde{y}) \vee f_{\tilde{\gamma}}^{(12)}(\tilde{x}, \tilde{y}). \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Имеют место свойства (аналогичные свойствам из § 9.А)

1) $f_{\tilde{\gamma}}^{(10)}(\tilde{x}, \tilde{y}) \approx f_{\tilde{\gamma}}(\tilde{x}, \tilde{y})$;

2) если некоторая функция $g(\tilde{x}, \tilde{y})$ удовлетворяет условию $g(\tilde{x}, \tilde{y}) \stackrel{\text{к, u}}{=} = f_{\tilde{\gamma}}(\tilde{x}, \tilde{y})$, то

$$f_{\tilde{\gamma}}^{(11)}(\tilde{x}, \tilde{y}) \approx g(\tilde{x}, \tilde{y}) d_{11}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

(заметим, что здесь обычное равенство может не иметь места: на наборе $\bar{1}$ левая и правая части могут принимать различные значения);

2') если $f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ есть x -функция и если некоторая функция $g(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ удовлетворяет условию $g(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \stackrel{\text{к+u, m}}{=} = f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, то

$$f^{(11)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = g(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) e_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \vee \kappa_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$$

(см. (44));

3) $f^{(14)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = f_{\bar{0}}^{(10)}(\tilde{x}, \tilde{y}) e_{14}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \vee \kappa_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$,

$$f^{(15)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = f_{\bar{1}}^{(10)}(\tilde{x}, \tilde{y}) e_{15}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$$

(ибо $f_{\bar{1}}^{(10)}(\bar{1}, \bar{1}) = 1$).

III. Заметим еще, что цепочки из элементов E''' и E^{IV} с отождествленными входами длины t''' и t^{IV} соответственно реализуют функцию $f(x) = x$. Схема S_8 (для функции ζ) при отождествлении входов также реализует x . Это позволяет во всех слоях реализовать необходимые задержки без применения следствия из леммы 15.

Перейдем теперь к описанию блоков (рис. 9).

Блок D_0 реализует «условные константы» $e^{(0)}(\tilde{z}) = \kappa_1(\tilde{z})$, $e^{(00)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \kappa_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ и $e^{(1)}(\tilde{z}) = x_{k+u+1} \vee \dots \vee x_n$, функции e_i ($11 \leq i \leq 17$) и d_{11} .

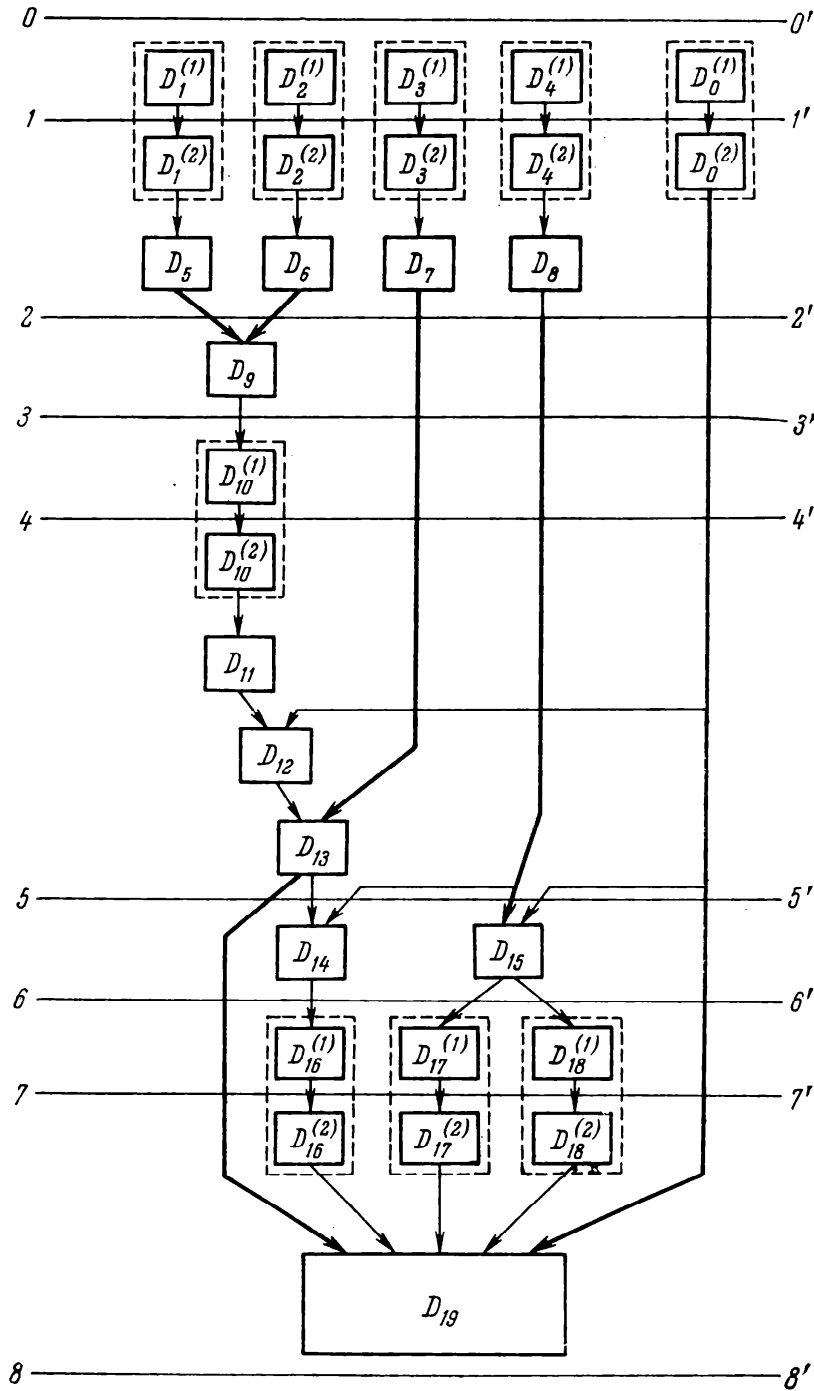


Рис. 9.

Он состоит из блоков D_{00} , D_{01} , D_{02} , D_{03} , D_{04} . Эти блоки соединены между собой аналогично блокам $B_{00} - B_{04}$ (см. рис. 8).

Блок D_{00} реализует условные константы. Так как $\xi(x, x, x, x) = x$, то D_{00} можно выбрать так, что

$$L(D_{00}) \leq C_{301} n, \quad T(D_{00}) = T^{(3)} + \lceil \log n \rceil T^{(1)}.$$

Очевидно, что

$$e^{(0)}(\tilde{z}) \approx 0, \quad e^{(1)}(\tilde{z}) \approx 1. \quad (46)$$

Блок D_{01} реализует А-функции $a_{ij}(\tilde{x}, \tilde{y})$ и $a_{ij}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ (см. замечание), используемые для реализации d_{11} и e_{11} . Их число меньше, чем $2n$. Имеем (лемма 12)

$$L(D_{01}) \leq C_{302}n^2, \quad T(D_{01}) = T^{(3)} +] \log n [T^{(1)}$$

(задержки схем для разных функций a_{ij} выравниваются при помощи цепочек из схем S_1).

Блок D_{02} реализует d_{11} в соответствии с представлением (43) (стр. 73) и e_{11} в соответствии с аналогичным представлением;

$$L(D_{02}) \leq C_{303}n^2, \quad T(D_{02}) = (] \log n [+ 1) T^{(1)}.$$

Блок D_{03} реализует $e_{12} - e_{15}$. Имеем (см. (35))

$$\begin{aligned} e_{12}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = & (x_1 \dots x_n \vee \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n-m} x_{n-m+1} \bar{x}_{n-m+2}) \vee \\ & \vee (x_1 \dots x_n \vee \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n-m} x_{n-m+2} \bar{x}_{n-m+3}) \vee (x_1 \dots x_n \vee \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n-m} x_{n-1} \bar{x}_n) \vee \\ & \vee (x_1 \dots x_n \vee \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n-m} x_n \bar{x}_{n-m+1}). \end{aligned}$$

Для $e_{13} - e_{15}$ имеют место аналогичные представления. Поэтому

$$L(D_{03}) \leq C_{304}n^2, \quad T(D_{03}) = T^{(3)} + 2] \log n [T^{(1)}.$$

Блок D_{04} реализует функции e_{16} и e_{17} (это А-функции);

$$L(D_{04}) \leq C_{305}n, \quad T(D_{04}) = T^{(3)} +] \log n [T^{(1)}.$$

Блоки D_1 и D_2 реализуют соответственно А-функции вида

$$x_1 \dots x_k \vee x_1^{\sigma_1} \dots x_k^{\sigma_k} \quad \text{и} \quad x_{k+1} \dots x_{k+u} \vee x_{k+1}^{\sigma_{k+1}} \dots x_{k+u}^{\sigma_{k+u}}$$

(аналоги обычных конъюнкций). Имеем (лемма 12)

$$L(D_1) \leq C_{306}k2^k, \quad T(D_1) = T^{(3)} +] \log k [T^{(1)},$$

$$L(D_2) \leq C_{307}u2^u, \quad T(D_2) = T^{(3)} +] \log u [T^{(1)}.$$

Блок D_3 реализует А-функции $x_1 \dots x_{k+u} \vee x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k} x_{k+1}^{\beta_1} \dots x_{k+u}^{\beta_u}$, наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_u)$ которых удовлетворяют условию

$$(\tilde{\alpha} = \tilde{0} \& \tilde{\beta} \neq \tilde{0}) \vee (\tilde{\beta} = \tilde{0} \& \tilde{\alpha} \neq \tilde{0}) \vee (\tilde{\alpha} = \tilde{1}) \vee (\tilde{\beta} = \tilde{1});$$

$$L(D_3) \leq C_{308}u2^u, \quad T(D_3) = T^{(3)} +] \log(k+u) [T^{(1)} = O(\log n).$$

Блок D_4 реализует все А-функции $x_{n-m+1} \dots x_n \vee x_{n-m+1}^{\sigma_{n-m+1}} \dots x_{n-m+j}^{\sigma_{n-m+j}}$ ($1 \leq j \leq m$);

$$L(D_4) \leq C_{309}m2^m; \quad T(D_4) = T^{(3)} +] \log m [T^{(1)}.$$

Блок D_5 реализует множество всех функций $h^1(\tilde{x})$, обладающих свойствами:

$$\text{а) } h^1(\tilde{0}) = 0, \quad h^1(\tilde{1}) = 1;$$

б) $h^1(\tilde{x})$ вне некоторой полосы равна 0 (за исключением набора $\tilde{1}$, на котором, как уже было сказано, h^1 равна 1). Очевидно, что для каждой функции $f_{\tilde{\gamma}_{IV}, h^m, i}(\tilde{x}, \tilde{\beta}_{IV}, h^{IV})$ существует такая функция $h^1(\tilde{x})$, что $f_{\tilde{\gamma}_{IV}, h^m, i}(\tilde{x}, \tilde{\beta}_{IV}, h^{IV}) \approx h^1(\tilde{x})$. Эту функцию $h^1(\tilde{x})$ будем обозначать также

через $f_{\tilde{y}l^m, h^m, i}^1(\tilde{x}, \tilde{\beta}_{l^{IV}, h^{IV}})$. Систему всех функций $f_{\tilde{y}l^m, h^m, i}^1(\tilde{x}, \tilde{\beta}_{l^{IV}, h^{IV}})$ при фиксированных l^m, h^m, i будем обозначать через $F_{l^m, h^m, i}^{IV, 1}$. Ясно, что каждая функция $h^1(\tilde{x})$ есть дизъюнкция не более s функций, реализованных блоком D_1 . В силу леммы 9

$$L(D_5) \leq C_{310} p s 2^s, \quad T(D_5) = \lceil \log s \rceil T^{(1)}, \quad \Omega(D_5) \leq p 2^s.$$

Блок D_6 реализует функции $\psi_{l^{IV}, h^{IV}}^{IV, 1}(\delta, \tilde{y}) = \psi_{l^{IV}, h^{IV}}^{IV}(\delta, \tilde{y}) \bar{\kappa}_0(\tilde{y}) \vee \kappa_1(\tilde{y})$ как дизъюнкции функций, реализованных блоком D_2 ,

$$L(D_6) \leq C_{311} 2^{2u}, \quad T(D_6) = u T^{(1)}, \quad \Omega(D_6) \leq C_{312} 2^u.$$

Очевидно, что

$$\psi_{l^{IV}, h^{IV}}^{IV, 1}(\delta, \tilde{y}) \approx \psi_{l^{IV}, h^{IV}}^{IV}(\delta, \tilde{y}).$$

Систему функций

$$\begin{aligned} \psi_{l^{IV}, h^{IV}}^{IV, 1}(0, \tilde{y}) \bar{y}_{l^{IV}, h^{IV}} \vee \psi_{l^{IV}, h^{IV}}^{IV, 1}(1, \tilde{y}) y_{l^{IV}, h^{IV}} = \\ = \zeta(y_{l^{IV}, h^{IV}}, \psi_{l^{IV}, h^{IV}}^{IV, 1}(0, \tilde{y}), \psi_{l^{IV}, h^{IV}}^{IV, 1}(1, \tilde{y})) \end{aligned}$$

обозначим через $\Psi^{IV, 1}$.

Блок D_8 реализует функции $\psi_{l^m, h^m}^{m, 1}(\delta, \tilde{z}) = \psi_{l^m, h^m}^m(\delta, \tilde{z}) \bar{\kappa}_0(\tilde{z}) \vee \kappa_1(\tilde{z})$, аналогичные функциям $\psi_{l^{IV}, h^{IV}}^{IV, 1}(\delta, \tilde{y})$. Поэтому

$$\psi_{l^m, h^m}^{m, 1}(\delta, \tilde{z}) \approx \psi_{l^m, h^m}^m(\delta, \tilde{z}). \quad (47)$$

Аналогично тому, как это было для блока B_8 , здесь имеем (используя функции, реализованные блоком D_4)

$$L(D_8) \leq C_{313} 2^m n^2, \quad T(D_8) = \lceil \log((k^m t^m + 4) 2m) \rceil T^{(1)}, \quad \Omega(D_8) \leq C_{314} 2^m.$$

Систему функций

$$\psi_{l^m, h^m}^{m, 1}(0, \tilde{z}) \bar{z}_{l^m, h^m} \vee \psi_{l^m, h^m}^{m, 1}(1, \tilde{z}) z_{l^m, h^m} = \zeta(z_{l^m, h^m}, \psi_{l^m, h^m}^{m, 1}(0, \tilde{z}), \psi_{l^m, h^m}^{m, 1}(1, \tilde{z}))$$

обозначим через $\Psi^{m, 1}$.

Блок D_7 реализует функции $f_{\tilde{y}}^{(12)}(\tilde{x}, \tilde{y})$ как дизъюнкции функций, реализованных блоком D_3 ,

$$L(D_7) \leq C_{315} 2^{u+m}, \quad T(D_7) = (u+2) T^{(1)}, \quad \Omega(D_7) = 2^m.$$

Как и в случае метода синтеза схем для 0-функций, легко проверить, что из схем $D_0, D_1-D_5, D_2-D_6, D_3-D_7, D_4-D_8$ наибольшую задержку имеет схема D_4-D_8 :

$$T^{(3)} + (\lceil \log m \rceil + \lceil \log((k^m t^m + 4) 2m) \rceil) T^{(1)}.$$

Блок D_9 реализует функции *) $\zeta(f_{\tilde{y}}^{1, i}(\tilde{x}, \tilde{\beta}), \psi^{IV, 1}(0, \tilde{y}), \psi^{IV, 1}(1, \tilde{y}))$;

$$L(D_9) \leq C_{316} 2^u p 2^s, \quad T(D_9) = T^{(4)}.$$

Блок D_{10} реализует функции $[\Phi^{IV}, \Sigma^{IV}, \Psi^{IV, 1}, F_{l^{IV}, h^{IV}, i}^{IV, 1}]$. Имеем (см. (42))

$$L(D_{10}) = p 2^m L(\mathfrak{B}^{IV}) \leq \rho \frac{2^n}{n},$$

$$T(D_{10}) = T(\mathfrak{B}^{IV}) = O(\log n).$$

*) Индексы l^m, h^m, l^{IV}, h^{IV} опускаем.

В силу того, что $f_{\tilde{\gamma}l^m, h^m, i}^1(\tilde{x}, \tilde{\beta}_{l^{IV}, h^{IV}}) \approx f_{\tilde{\gamma}l^m, h^m, i}(\tilde{x}, \tilde{\beta}_{l^{IV}, h^{IV}})$ и $\psi_{l^{IV}, h^{IV}}^{IV, 1}(\delta, \tilde{y}) \approx \psi_{l^{IV}, h^{IV}}^{IV}(\delta, \tilde{y})$, то в силу леммы 22 и (41)

$$[\Phi^{IV}, \Sigma^{IV}, \Psi^{IV, 1}, F_{l^m, h^m, i}^{IV, 1}] \stackrel{k, u}{=} f_{\tilde{\gamma}l^m, h^m, i}(\tilde{x}, \tilde{y}). \quad (48)$$

Блок D_{11} реализует функции

$$f_{\tilde{\gamma}l^m, h^m}^{**}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \bigvee_i [\Phi^{IV}, \Sigma^{IV}, \Psi^{IV, 1}, F_{l^m, h^m, i}^{IV, 1}],$$

$$L(D_{11}) \leq C_{317} p 2^m, \quad T(D_{11}) = \lfloor \log p \rfloor T^{(1)}.$$

Из (48) следует, что

$$f_{\tilde{\gamma}l^m, h^m}^{**}(\tilde{x}, \tilde{y}) \stackrel{k, u}{=} f_{\tilde{\gamma}l^m, h^m}(\tilde{x}, \tilde{y}). \quad (49)$$

Блок D_{12} реализует функции $f_{\tilde{\gamma}}^{***}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f_{\tilde{\gamma}}^{**}(\tilde{x}, \tilde{y}) d_{11}(\tilde{x}, \tilde{y})$,

$$L(D_{12}) \leq C_{318} 2^m, \quad T(D_{12}) = T^{(1)}.$$

В силу свойства 2), (45) и (49)

$$f_{\tilde{\gamma}}^{***}(\tilde{x}, \tilde{y}) \approx f_{\tilde{\gamma}}^{(11)}(\tilde{x}, \tilde{y}). \quad (50)$$

Блок D_{13} реализует функции $f_{\tilde{\gamma}}^{****}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f_{\tilde{\gamma}}^{***}(\tilde{x}, \tilde{y}) \bigvee f_{\tilde{\gamma}}^{(12)}(\tilde{x}, \tilde{y})$,

$$L(D_{13}) \leq C_{319} 2^m, \quad T(D_{13}) = T^{(1)}.$$

Из (45), свойства 1) и (50) следует, что

$$f_{\tilde{\gamma}}^{****}(\tilde{x}, \tilde{y}) \approx f_{\tilde{\gamma}}(\tilde{x}, \tilde{y}). \quad (51)$$

Систему функций $f_{\tilde{\gamma}l^m, h^m}^{****}(\tilde{x}, \tilde{y})$ будем обозначать через F^{m*} .

Блок D_{14} реализует систему функций

$$\zeta(f_{\tilde{\gamma}l^m, h^m}^{****}(\tilde{x}, \tilde{y}), \psi_{l^m, h^m}^{m, 1}(0, \tilde{z}), \psi_{l^m, h^m}^{m, 1}(1, \tilde{z})).$$

$$L(D_{14}) \leq C_{320} 2^m, \quad T(D_{14}) = T^{(4)}$$

Блок D_{16} реализует функцию $f^{**}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = [\Phi^m, \Sigma^m, \Psi^{m, 1}, F^{m*}]$ при помощи одного блока \mathfrak{B}^m . Имеем (см. (42))

$$L(D_{16}) = o\left(\frac{2^n}{n}\right), \quad T(D_{16}) \sim \tau^* n.$$

В силу леммы 22, (47), (51), (40)

$$f^{**}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \stackrel{k+u, m}{=} f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}). \quad (52)$$

Обозначим через $F_{\tilde{\epsilon}}^m$ систему функций $e^{(f(\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}, \tilde{\gamma}))}(\tilde{z})$ (набор $\tilde{\gamma}$ пробегает множество всех наборов длины m).

Блок D_{15} реализует функции $\zeta(e^{(\tilde{\epsilon})}(\tilde{z}), \psi_{l^m, h^m}^{m, 1}(0, \tilde{z}), \psi_{l^m, h^m}^{m, 1}(1, \tilde{z}))$,

$$L(D_{15}) \leq C_{321} 2^m, \quad T(D_{15}) = T^{(4)}.$$

Блок D_{17} реализует функции $f_0^{**}(\tilde{z}) = [\Phi^m, \Sigma^m, \Psi^{m, 1}, F_0^m]$ при помощи одного блока \mathfrak{B}^m . Имеем

$$L(D_{17}) = o\left(\frac{2^n}{n}\right).$$

В силу леммы 22, (47), (46)

$$f_0^{**}(\tilde{z}) \approx f(\tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{z}).$$

Блок D_{18} аналогичным образом реализует $f_1^{**}(\tilde{z}) = [\Phi'', \Sigma'', \Psi''^{1,1}, F_1'']$,

$$f_1^{**}(\tilde{z}) \approx f(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{z}),$$

$$L(D_{18}) = o\left(\frac{2^n}{n}\right).$$

Наконец, блок D_{19} реализует функцию $f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ в соответствии с представлением

$$f^{(11)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = f^{**}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) e_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \vee \kappa_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$$

(см. свойство 2', (52)),

$$f^{(12)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = f_0^{**}(\tilde{z}) e_{12}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \vee \kappa_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}),$$

$$f^{(13)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = f_1^{**}(\tilde{z}) e_{13}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \vee \kappa_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}),$$

$$f^{(14)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = f_0^{****}(\tilde{x}, \tilde{y}) e_{14}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \vee \kappa_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \quad (\text{см. (54)}),$$

$$f^{(15)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = f_1^{****}(\tilde{x}, \tilde{y}) e_{15}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \vee \kappa_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}),$$

$$f^{(16)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \begin{cases} \kappa_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), & \text{если } f(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}) = 0, \\ e_{16}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), & \text{если } f(\tilde{1}, \tilde{1}, \tilde{0}) = 1, \end{cases}$$

$$f^{(17)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \begin{cases} \kappa_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), & \text{если } f(\tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{1}) = 0, \\ e_{17}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), & \text{если } f(\tilde{0}, \tilde{0}, \tilde{1}) = 1, \end{cases}$$

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \bigvee_{j=11}^{17} f^{(j)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}),$$

$$L(D_{19}) = C_{322}, \quad T(D_{19}) = 5T^{(1)}$$

(два яруса на реализацию $xy \vee z$ и схема $D_{7,8}$).

Сложность всех (дополнительных) схем задержки имеет порядок $o\left(\frac{2^n}{n}\right)$:

Окончательно для всей схемы S имеем

$$L(S) \leq \rho^* \frac{2^n}{n}, \quad T(S) \leq \tau^* n.$$

Добавление

Пусть $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ — набор из нулей и единиц и пусть $|\tilde{\sigma}| = \sum_{i=1}^n 2^{n-i} \sigma_i$. Введем обозначения

$\mathfrak{F}^{n,q}$ — класс всех вектор-функций (т. е. систем функций)

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_q(x_1, \dots, x_n))$$

(в [6] такие вектор-функции назывались (n, q) -операторами); $\mathfrak{F}_c^{n,q}$ (соответственно $\mathfrak{F}_x^{n,q}$, $\mathfrak{F}_{\bar{x}}^{n,q}$) — класс вектор-функций из $\mathfrak{F}^{n,q}$, у которых все компоненты являются c -функциями (соответственно x -функциями, \bar{x} -функциями).

Из сказанного выше (см. § 1—2) следует, что в случае регулярного базиса могут быть реализованы (правильной схемой) все вектор-функции из $\mathfrak{F}^{n,q}$, а в случае нерегулярного базиса — лишь вектор-функции из $\mathfrak{F}_c^{n,q} \cup \mathfrak{F}_x^{n,q} \cup \mathfrak{F}_{\bar{x}}^{n,q}$.

Пусть $r \leq 2^n$ и $\mathfrak{F}^{n, q, r}$ — класс всех вектор-функций \tilde{f} из $\mathfrak{F}^{n, q}$, удовлетворяющих условию

$$\text{если } |\tilde{\sigma}| \geq r, \text{ то } \tilde{f}(\tilde{\sigma}) = (0, \dots, 0);$$

$\mathfrak{F}_c^{n, q, r}$ (соответственно $\mathfrak{F}_x^{n, q, r}$, $\mathfrak{F}_x^{n, q, r}$) — класс всех вектор-функций \tilde{f} из $\mathfrak{F}_c^{n, q}$ (соответственно из $\mathfrak{F}_x^{n, q}$, $\mathfrak{F}_x^{n, q}$), удовлетворяющих условию

$$\text{если } r \leq |\tilde{\sigma}| \leq 2^n - 2, \text{ то } \tilde{f}(\tilde{\sigma}) = (0, \dots, 0).$$

Как и выше, для вектор-функции \tilde{f} (реализуемой правильной схемой в рассматриваемом базисе) обозначим через $L(\tilde{f})$ наименьшую из сложностей, а через $T(\tilde{f})$ — наименьшую из задержек правильных схем, реализующих \tilde{f} . Пусть \mathfrak{R} — некоторый класс вектор-функций, реализуемых правильными схемами. Пусть

$$L(\mathfrak{R}) = \max_{\tilde{f} \in \mathfrak{R}} L(\tilde{f}), \quad T(\mathfrak{R}) = \max_{\tilde{f} \in \mathfrak{R}} T(\tilde{f}).$$

Имеют место следующие утверждения, обобщающие теоремы 1 и 2 (см. § 1) и являющиеся аналогами теорем Д.10 и Д.12 из [6].

Теорема Д.1. Если базис \mathcal{E} регулярный и $\frac{\log q_n}{2^n} \rightarrow 0$, то

$$L(\mathfrak{F}^{n, q_n}) \sim L(\mathfrak{F}_c^{n, q_n}) \sim L(\mathfrak{F}_x^{n, q_n}) \sim L(\mathfrak{F}_x^{n, q_n}) \sim \rho \frac{q_n 2^n}{n + \log q_n},$$

$$T(\mathfrak{F}^{n, q_n}) \sim T(\mathfrak{F}_c^{n, q_n}) \sim T(\mathfrak{F}_x^{n, q_n}) \sim T(\mathfrak{F}_x^{n, q_n}) \sim \tau n.$$

Более того, для любого $\varepsilon > 0$ и любой вектор-функции \tilde{f} из \mathfrak{F}^{n, q_n} при достаточно большом n существует схема S , реализующая \tilde{f} и такая, что

$$L(S) \leq (1 + \varepsilon) \rho \frac{q_n 2^n}{n + \log q_n}, \quad T(S) \leq (1 + \varepsilon) \tau n.$$

Теорема Д.2. Если базис \mathcal{E} регулярный,

$$2^{n-1} < r_n \leq 2^n$$

и

$$\frac{\log q_n}{2^n} \rightarrow 0,$$

то

$$L(\mathfrak{F}^{n, q_n, r_n}) \sim L(\mathfrak{F}_c^{n, q_n, r_n}) \sim L(\mathfrak{F}_x^{n, q_n, r_n}) \sim L(\mathfrak{F}_x^{n, q_n, r_n}) \sim \rho \frac{q_n r_n}{\log(q_n r_n)},$$

$$T(\mathfrak{F}^{n, q_n, r_n}) \sim T(\mathfrak{F}_c^{n, q_n, r_n}) \sim T(\mathfrak{F}_x^{n, q_n, r_n}) \sim T(\mathfrak{F}_x^{n, q_n, r_n}) \sim \tau n.$$

Более того, оценки сложности и задержки асимптотически достигаются одновременно (т. е. на одной схеме; см. конец формулировки теоремы Д.1).

Теорема Д.3. Если базис \mathcal{E} нерегулярный и $\frac{\log q_n}{2^n} \rightarrow 0$, то

$$L(\mathfrak{F}_c^{n, q_n}) \sim \rho \frac{q_n 2^n}{n + \log q_n}, \quad L(\mathfrak{F}_x^{n, q_n}) \sim L(\mathfrak{F}_x^{n, q_n}) \sim \rho^* \frac{q_n 2^n}{n + \log q_n},$$

$$T(\mathfrak{F}_c^{n, q_n}) \sim \tau n, \quad T(\mathfrak{F}_x^{n, q_n}) \sim T(\mathfrak{F}_x^{n, q_n}) \sim \tau^* n.$$

Более того, оценки сложности и задержки асимптотически достигаются одновременно.

Теорема Д.4. Если базис \mathcal{E} нерегулярный,

$$2^{n-1} < r_n \leq 2^n$$

и

$$\frac{\log q_n}{2^n} \rightarrow 0,$$

то

$$L(\mathfrak{F}_c^{n, q_n, r_n}) \sim \rho \frac{q_n r_n}{\log(q_n r_n)}, \quad L(\mathfrak{F}_x^{n, q_n, r_n}) \sim L(\mathfrak{F}_x^{n, q_n, r_n}) \sim \rho^* \frac{q_n r_n}{\log(q_n r_n)},$$

$$T(\mathfrak{F}_c^{n, q_n, r_n}) \sim \tau n, \quad T(\mathfrak{F}_x^{n, q_n, r_n}) \sim T(\mathfrak{F}_x^{n, q_n, r_n}) \sim \tau^* n.$$

Более того, оценки сложности и задержки асимптотически достигаются одновременно.

Нижние оценки сложности и задержки (во всех четырех теоремах) устанавливаются аналогично соответствующим оценкам теорем 1 и 2. Некоторое отличие состоит в том, что нижняя оценка задержки системы функций определяется сложностью одной функции системы, — в данном случае порядка $\frac{2^n}{n}$.

Методы синтеза, дающие одновременное достижение асимптотически минимальной сложности и асимптотически минимальной задержки, также аналогичны соответствующим методам для одной функции. Основное отличие состоит в том, что функции $f_{\gamma_{l', h', i}} \sim (x, \beta_{l', h'})$ реализуются сразу как функции от k аргументов с асимптотически минимальной задержкой ($\sim \tau k$)*. Число полос p удовлетворяет условию $p \leq \frac{r}{2^{n-k_s}} + 2$ (ср. с [6], стр. 102). Значения параметров могут быть выбраны, например, следующим образом**). Пусть $\mu = \log(q_n r_n)$, $\lambda = \min\left(\log n, \frac{n - \log \mu}{5}\right)$.

Тогда

$$k = [\log \mu + \lambda], \quad u = [2\lambda], \quad s = [\mu - 5 \log \mu],$$

$$t' = 2 \left[\frac{1}{2 \log k'} (m - \lambda) \right], \quad t'' = 2 \left[\frac{\lambda}{2 \log k''} \right].$$

В случае нерегулярного базиса при реализации вектор-функций из $\mathfrak{F}_c^{n, q}$ блок B_0 реализует дополнительно функцию $e = x_1 x_2 \dots x_n \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n$ в соответствии с представлением $e = (x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee \bar{x}_3) \dots (x_{n-1} \vee \bar{x}_n)(x_n \vee \bar{x}_1)$ и с использованием схем S_7 . Затем реализуются 0-функции, совпадающие с компонентами исходной вектор-функции на всех наборах, кроме $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$. Наконец, к каждой из полученных функций прибавляется либо 0 (если соответствующая компонента есть 0-функция) либо e (если соответствующая компонента есть 1-функция).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г л а г о л е в В. В., Некоторые оценки дизъюнктивных нормальных форм функций алгебры логики. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 19, М., «Наука», 1967, 75—94.
2. К у д р я в ц е в В. Б., Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 8, М., Физматгиз, 1962, 91—115.

*) Может быть указана прямая (но более сложная) конструкция, не использующая теорему 1.

***) При реализации вектор-функций из \mathfrak{F}_c^{n, q_n} и из \mathfrak{F}_x^{n, q_n} в выражениях для t' и t'' вместо k' и k'' берутся k''' и k^{IV} соответственно.

3. Лупанов О. Б., О синтезе некоторых классов управляющих систем. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 10, М., Физматгиз, 1963, 63—97.
4. Лупанов О. Б., Об одном классе схем из функциональных элементов. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 7, М., Физматгиз, 1962, 61—114.
5. Лупанов О. Б., Об одном методе синтеза схем. Известия вузов, Радиофизика 1, 1, 1958, 120—140.
6. Лупанов О. Б., Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 14, М., «Наука», 1965, 31—110.
7. Макаров С. В., Верхняя оценка средней длины дизъюнктивной нормальной формы. Дискретный анализ (сб. Трудов ИМ СО АН СССР), вып. 3, 1964, 78—80.
8. Нигматуллин Р. Г., Вариационный принцип в алгебре логики. Дискретный анализ (сб. Трудов ИМ СО АН СССР), вып. 10, 1967, 69—89.
9. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б., Функции алгебры логики и классы Поста, М., «Наука», 1966.
10. Post E. L., Two-valued iterative systems of mathematical logic. Princeton. Ann. of Math. Studies 5, 1941.
11. Shannon C. E., The synthesis of two-terminal switching circuits. Bell Syst. Techn. J. 28, 1, 1949, 59—98 (русский перевод в сб. Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, ИЛ, М., 1963, 59—101).

Поступило в редакцию 30 XII 1968.
